В.Г. БАБЧУК,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Державна академія статистики, обліку та аудиту

Метод знаходження коренів алгебраїчного рівняння *n*-го порядку

Розглянемо алгебраїчне рівняння порядку n

$$\sum_{i=0}^{n} b_i \lambda^{n-1} = 0,\ b_0 = 1,\ b_i \in R\ \ \forall i \tag{1}$$

Завжди існує матриця системи звичайних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ x = (x_1, ..., x_n)^*,\ A = \{a_{ij}\}_1^n, \tag{2}$$

така, що

$$|A - \lambda E| = \sum_{i=0}^{n} b_i \lambda^{n-1} = 0 \tag{3}$$

Приклад 1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \dots & -b_1 \end{pmatrix}$$

Теорема 1.
Для системи (2) завжди існують лінійні форми

$$V_i(x) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j,\ i = \overline{1,n},\ k_{i1} = 1 \tag{4}$$

такі, що унаслідок системи (2) виконуються рівняння

$$\dot{V}_i(x(t)) = \lambda_i V_i(x(t)), \tag{5}$$

де λ_i – корені характеристичного рівняння (3).
Доведення. Для скалярного добутку $(k_i x)$ запишемо рівняння

$$(k_i x)'_t = (k_i(Ax)) = \lambda_i (k_i x).$$

звідки

$$((k_i A)x) = ((k_i \lambda_i)x)$$
$$(k_i A) = (k_i \lambda_i)E$$
$$k_i(A - \lambda E) = 0$$
$$|A - \lambda E| = 0$$

Теорема доведена.

Теорема 2.

Для системи (2) існує і єдина однорідна форма $V\left(x^n\right)$ n-го порядку така, що

$$\dot{V}\left(x^n(t)\right)=-b_1 V\left(x^n(t)\right),\ -b_1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \tag{6}$$

і має вигляд

$$V\left(x^n\right)=\prod_{i=1}^{n}V_i(x), \tag{7}$$

де $V_i(x)$ задовільняють рівнянням (5).

Доведення. Дійсно, якщо $V_i(x)$ задовольняють рівнянням (5), то унаслідок системи (2)

$$\dot{V}\left(x^n(t)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i V_i(x).$$

Єдиність випливає із того, що при $k_{i1}=1$ для знаходження k_{i1} із рівнянь

$$\dot{V}_i\left(x(t)\right)=\lambda_i V_i\left(x(t)\right)$$

отримаємо неоднорідну систему лінійних рівнянь, яка за теоремою 1 має розв'язок.

Лема. Щоб знайти корені рівняння (1) треба:

1) записати систему (2) таку, щоб її характеристичне рівняння було (1);
2) знайти функцію із умови (6);
3) розкласти $V(x^n)$ на лінійні множники (7);
4) із умови (5) знайти корені рівняння (1).

Приклад 2. Знайдем корені рівняння

$$\lambda^3-\lambda^2-\lambda-2=0\ ,$$

в якому $-b_1=1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$. (1`)

Запишемо систему

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=2x_1+x_2+x_3\end{cases} \tag{2`}$$

Характеристичне рівняння якої буде (1`).

Знайдемо функцію

$$V\left(x^3\right)=x_1^3+k_1x_1^2x_2+k_2x_1^2x_3+k_3x_1x_2^2+k_4x_1x_3^2+$$
$$+k_5x_1x_2x_3+k_6x_2^3+k_7x_2^2x_3+k_8x_2x_3^2+k_9x_3^3$$

із умови (унаслідок системи (2`))

$$\dot{V}\left(x^3(t)\right)=V\left(x^3(t)\right), \tag{6`}$$

тобто

$$\left(3x_1^2+2k_1x_1x_2+2k_2x_1x_3+k_3x_2^2+k_4x_3^2+k_5x_2x_3\ \cdot x_2\right)+$$
$$+\left(k_1x_1^2+2k_3x_1x_2+k_5x_1x_3+3k_6x_2^2+2k_7x_2x_3+k_8x_3^2\ \cdot x_3\right)+$$
$$+\left(k_2x_1^2+2k_4x_1x_3+k_5x_1x_2+k_7x_2^2+2k_8x_2x_3+3k_9x_3^2\right)\cdot\left(2x_1+x_2+x_3\right)=$$
$$=x_1^3+k_1x_1^2x_2+k_2x_1^2x_3+k_3x_1x_2^2+k_4x_1x_3^2+k_5x_1x_2x_3+k_6x_2^3+k_7x_2^2x_3+k_8x_2x_3^2+k_9x_3^3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових одночленах, отримаємо систему лінійних неоднорідних рівнянь відносно $k_j\left(j=\overline{1,\ 9}\right)$

$$\begin{cases} 2k_2=1 \\ -k_1+k_2+2k_5=-3 \\ k_1+4k_4=0 \\ 2k_1-k_3+k_5+2k_7=0 \\ k_4+k_5+6k_9=0 \\ k_2+k_3+k_4+2k_8=0 \\ k_3-k_6+k_7=0 \\ k_5+3k_6+2k_8=0 \\ k_4+2k_7+k_8+3k_9=0 \\ k_8+2k_9=0. \end{cases}$$

Звідки знаходимо:

$$k_1=1;\ k_2=\frac{1}{2};\ k_3=\frac{3}{4};\ k_4=-\frac{1}{4};\ k_5=-\frac{5}{4};\ k_6=\frac{3}{4};\ k_7=0;\ k_8=-\frac{1}{2};\ k_9=\frac{1}{4}.$$

Отримали форму третього ступеня

$$V(x^3)=x_1^3+x_1^2x_2+\frac{1}{2}x_1^2x_3+\frac{3}{4}x_1x_2^2-\frac{5}{4}x_1x_2x_3-\frac{1}{4}x_1x_3^2+\frac{3}{4}x_2^3-\frac{1}{2}x_2x_3^2+\frac{1}{4}x_3^3,$$

яка розкладається на лінійні множники:

$$V_1(x)=x_1+x_2+x_3;$$

$$V_2(x)=x_1-\frac{\sqrt{3}}{2}ix_2+\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot\xi_3; \qquad (4`)$$

$$V_3(x)=x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}ix_2-\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot x_3.$$

Унаслідок системи (2`):

$$\dot{V}_1(x(t))=V_1(x(t));$$

$$\dot{V}_2(x(t))=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot V_2(x(t)) \qquad (5`)$$

$$\dot{V}_3(x(t))=-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot V_3(x(t)).$$

Звідки:

$$\lambda_1=1;\ \lambda_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ \lambda_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Теорема 3.

Однорідна форма $V\left(x^n\right)$ розкладається на лінійні множники $V_i(x)\ \left(i=\overline{1,\ n}\right)$ тоді і тільки тоді, коли існує така система (2) з характеристичним рівнянням (1), унаслідок якої виконується рівняння (6).

Доведення. Якщо система (2) задана, то правильність цієї теореми випливає із теореми 1 і теореми 2.

Якщо форма $V(x^n)$ розкладається на множники (7), то завжди знайдеться така система (2), що лінійні форми V_i із (7) задовільнятимуть (5) і тоді буде виконуватись (6).

Список використаних джерел

1. В. Г. Бабчук. Инвариантные множества системы линейных стохастических диффузионных уравнений с постоянными коэффициентами. Киев: ИК АН УССР, 1980. – 45 с. Препринт – 80-31.
2. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц: Наука. М. 1967 – 575 с.