

Джордж Одні Юл: життя та внесок у розвиток статистичної науки

Статтю присвячено життю та діяльності видатного англійського вченого, статистика-математика Джорджа Одні Юла. Підкреслено значення його праць для розвитку статистичної науки.



Джордж Одні Юл (George Udny Yule, 18.02.1871 – 26.06.1951) – видатний англійський теоретик статистичної науки, визначний представник англійської статистичної школи, наукові добробки якого лягли в основу розробки ряду нових важливих напрямів її розвитку.

Дж. Юл народився в Шотландії, поблизу Хеддінгтона, у знатній сім'ї, з якої вийшло багато відомих учених, державних діячів, адміністраторів і воєначальників. Його батько і племінник були удостоєні почесного звання лицаря. У 16 років Дж. Юл почав вивчати технічні науки в Університетському коледжі Лондона, де його цікавила математика і фізика. У 1892 р. він переїхав до Німеччини, де в Боннському університеті під керівництвом відомого німецького фізика Генріха Герца (1857–1894 рр.) почав вивчати фізику і проводити дослідження електричних хвиль. Результати цих досліджень Дж. Юл узагальнив і опублікував у чотирьох статтях. Уже перші праці зробили його ім'я відомим. Проте з 1893 р. Дж. Юл відійшов від розвідок у фізиці і віддав перевагу дослідженням у галузі статистики [1].

На становлення і формування Дж. Юла як ученого-статистика вплинув Карл Пірсон (1857–1936 рр.) – всесвітньо відомий англійський статистик-математик, засновник англійської статистичної біометричної школи. Дж. Юл був

учнем і співробітником К. Пірсона, який у 1893 р., обіймаючи посаду головного професора кафедри прикладної математики в Університетському коледжі Лондона, запросив юного вченого працювати молодшим лектором, сприяв його першим науковим крокам у галузі статистики. Дж. Юл займав цю посаду протягом шести років, але заробітної плати не вистачало, тому в 1899 р. він став секретарем експертної комісії в Лондоні. З 1912 р. учений читав лекції зі статистики у Кембриджському університеті, отримуючи мізерну зарплатню, але він ніколи про це не шкодував. У 1913 р. він став членом коледжу Кембриджського університету і жив у коледжі майже до кінця життя. У 1930 році Дж. Юл вийшов на пенсію. Хоча він все ще активно займався дослідженнями і міг продовжувати працювати багато років, однак почав жалкувати, що статистика так розвинулась і він вже ніколи не зможе йти з нею в ногу [1].

У 1896 р. Дж. Юл був обраний членом Королівського статистичного товариства і протягом усього життя брав активну участь у його діяльності: займав посаду Почесного секретаря, у 1924–1926 рр. – Президента, у 1911 р. був нагороджений престижною золотою медаллю Гая. З 1922 р. він був також членом Королівського (наукового) товариства. Дж. Юл був неординарною особистістю, мав широкі знання з різних галузей науки, вже у передпенсійному віці почав вивчати латинську мову і писати нею вірші [1].

Свою першу наукову працю зі статистики про кореляцію між пауперизмом та обсягом допомоги незаможним (“On the correlation of pauperism with proportion of out-relief”) учений опублікував у 1895 р. У роботі викладено методику вивчення залежності між двома альтернативними ознаками на основі застосування чотириклітинкових таблиць, так званих таблиць контингенції [1]. У подальшому Дж. Юл активно займався науково-дослідною діяльністю з різних проблем статистичної науки, його науковий доробок у цій галузі знання вагомий і різноманітний. Наукові праці Дж. Юла зі статистики можна поділити за чотирма напрямками.

До першого з напрямів належать методологічні розробки, пов'язані з питаннями визначення предмета і наукового змісту статистики як науки. Найбільш ґрунтовно і повно методологічні проблеми статистичної науки розглянуті Дж. Юлом у книзі “Введення в теорію статистики” (“An introduction to

the theory of statistics”), що була написана на основі лекцій, прочитаних у 1902–1909 рр. в Університетському коледжі Лондона. Ця книга вийшла у 1911 р. та відразу набула широкої популярності: тільки за двадцять п’ять років вона перевидавалася десять разів, а всього було випущено 14 її видань, останнє – у 1950 р. Протягом десяти видань (за період 1911–1935 рр.) Дж. Юл доповнював і удосконалював цю працю. Останні чотири видання були підготовлені з суттєвою переробкою і доповненнями у співтворстві з видатним англійським статистиком Морісом Кенделом (Maugice Kendall, 1907–1983 рр.). Цю роботу було перекладено чеською, польською, іспанською та португальською мовами. У 1930 р. з’явився україномовний переклад із 7-го англійського видання [2], а у 1960 р. – російськомовний переклад із 14-го англійського видання [3]. Книга Дж. Юла написана на високому науковому рівні, вона отримала заслужене визнання та була високо оцінена вченими-статистиками. Видатний російський теоретик статистики О. Чупров (1874–1926 рр.) вважав її найкращим посібником для ознайомлення початківця з практикою статистичного дослідження [4, с. 160]. Ця книга мала і таку характерну особливість: на відміну від праць інших представників англійської біометричної школи статистиків, у яких розглядалися, як правило, питання застосування статистико-математичних методів для вивчення біологічних і природних явищ, вона містила переважно виклад застосування статистико-математичних методів для дослідження соціальних і економічних явищ.

Перші сторінки книги Дж. Юл присвячує одному з важливих питань, що постає на початку вивчення будь-якої науки, а саме: питанню про назву відповідної галузі знання, її виникнення й еволюцію. На його думку, терміни “статистика”, “статистик”, “статистичний” очевидно походять від латинського слова “status” у тому значенні, якого воно набуло у середньовічній латинській мові, тобто “політичний стан” [2, с. 1]. Згодом слово “status” почали тлумачити як вчення про стан явища, об’єктів, і в цьому значенні похідний термін “статистика” розглядався в інших мовах. У сучасній статистичній літературі, як науковій, так і навчальній, таке тлумачення стало загальноприйнятим. Варто зазначити, що слово “status” найбільш адекватно відображає сутність сучасного розуміння статистики як науки і навчальної дисципліни, що вивчає стан, положення, умови масових явищ, їх спільно існуючі сукупності, дає можливість підкреслити не лише теоретичну й пізнавальну сутність статистики, але і її прикладне значення.

Щодо окреслення змісту статистики, то Дж. Юл розглядав її як методологічну науку. Він писав: “Під теорією статистики ми розуміємо виклад статистичних методів. Під статистичними методами ми розуміємо методи, спеціально при-

стосовані до тлумачення кількісних даних, що знають впливу багатьох чинників” [2, с. 5]. Слід зазначити, що зарубіжні учені-статистики, як правило, також трактують статистику як методологічну науку.

У СРСР до кінця 30-х років у статистичній науковій і навчальній літературі статистика визначалася як методологічна наука, основою якої є теорія ймовірностей та закон великих чисел. У кінці 30-х років у СРСР розпочався перегляд поглядів на статистику та на її тлумачення як суспільної науки. У березні 1954 р. Академією Наук СРСР, Центральним статистичним управлінням СРСР, Міністерством вищої освіти СРСР була скликана спеціальна наукова нарада з питань статистики, що поставила за мету виробити єдину позицію щодо питання про предмет статистики як науки на основі теорії марксистсько-ленінізму. У матеріалах наради було зазначено, що статистика – самостійна суспільна наука, теоретичною основою якої є історичний матеріалізм і марксистсько-ленінська політична економія.

У теперішній час у працях теоретиків статистичної науки, як вітчизняних, так і зарубіжних, статистика усе більше розглядається як учення про методи дослідження масових явищ з їх кількісного боку. Більш детально різні погляди вчених-статистиків щодо походження і значення терміна “статистика” та наукового змісту статистики як науки розглянуто у праці [5, с. 28–36].

До другого напряму наукової діяльності Дж. Юла можна віднести напрацювання, присвячені проблемам розробки статистико-математичних методів вимірювання зв’язку між явищами. З його ім’ям пов’язаний розвиток теорії кореляції і регресії. Головна заслуга Дж. Юла у цьому напрямі полягає в тому, що він створив цілісну систему статистичних методів вивчення зв’язків між якісними ознаками. Розроблені ним статистичні методи та характеристики вимірювання зв’язку між якісними ознаками, зокрема двома альтернативними (або дихотомічними) ознаками на основі чотириклітинкової таблиці, частоти яких зазвичай позначають через a, b, c, d , давно і впевнено увійшли до арсеналу засобів статистичної науки. Дж. Юлом на основі чотириклітинкових таблиць були розроблені й опубліковані (відповідно у 1900 р. і 1912 р.) два показники зв’язку між альтернативними ознаками [6; 7]:

- коефіцієнт асоціації: $Q = \frac{ad - bc}{ad + bc}$;

- коефіцієнт колігації: $\omega = \frac{\sqrt{ad} - \sqrt{bc}}{\sqrt{ad} + \sqrt{bc}}$.

Слід зазначити, що Дж. Юл віддавав перевагу ω перед Q .

Значення коефіцієнтів асоціації та колігації коливаються у межах від -1 до $+1$, і тому вони характеризують не лише щільність, а й напрям зв'язку: знак "плюс" означає прямий зв'язок, знак "мінус" – зворотний (знак визначається за знаком чисельника). Зв'язок між досліджуваними ознаками підтверджується, якщо абсолютне значення коефіцієнтів не менше $0,5$. Якщо ж їх абсолютне значення менше $0,5$, такий зв'язок вважається неістотним.

Суттєвим недоліком коефіцієнтів асоціації та колігації є те, що їх величина за модулем становить 1 , коли в одній із чотирьох клітин немає частоти, тобто вона дорівнює нулю. Отже, ці коефіцієнти перебільшують оцінку щільності зв'язку, причому завжди $Q > \omega$.

Дж. Юл уперше зазначив, що застосування критерію узгодження Пірсона χ^2 (хі-квадрат) при аналізі таблиць контингенції залежить від ступенів свободи (df):

$$df = (r - 1) \cdot (c - 1),$$

де r – кількість рядків; c – кількість стовпців. Він не зміг довести це математично, однак продемонстрував за допомогою моделювання. Пізніше відомий англійський статистик Р. Фішер (1890–1968 рр.) математично довів це твердження Дж. Юла [1].

Учений також досліджував зв'язок між коефіцієнтами кореляції та регресії. Якщо засновник теорії кореляції англійський біолог і статистик Ф. Гальтон (1822–1911 рр.) ототожнював ці коефіцієнти, то Дж. Юл в опублікованій у 1897 р. статті довів, що між ними існує взаємозв'язок: коефіцієнт кореляції може набувати форми стандартизованого коефіцієнта регресії, в який внесена поправка на співвідношення середніх квадратичних відхилень двох досліджуваних ознак, тобто:

$$r = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y},$$

де b – коефіцієнт регресії [8].

Дж. Юл звернув увагу на те, що існуюча теорія кореляції ґрунтується на припущенні нормального розподілу досліджуваних ознак, і довів можливість застосування кореляційних обчислень при порушенні цієї теоретичної вимоги. В опублікованій у 1897 р. статті він писав, що єдина теорія кореляції, яка застосовується на практиці у теперішній час, ґрунтується на законі нормального розподілу, але цей закон, на жаль, не є правомірним (не спрацьовує) у багатьох випадках, як звичайних, так і важливих. На нього не можна спиратися, якщо брати приклади з біології, зі статистики народжуваності людей, щодо вимірювання квітів або вимірювання ваги навіть дорослих. З іншого боку, в економічній статистиці нормальні розподіли є, очевидно, винятковими; варіації заробітних плат, цін, вартостей, пауперизму та ін. завжди асиметричні. У випадках, подібних до цих, наразі ми не маємо за-

собів для вимірювання кореляції одним або більше коефіцієнтами кореляції, що надаються теорією нормальності [8].

Досліджуючи питання про значення формули Браве для регресії у випадку зміщеної кореляції, в опублікованій у 1897 р. праці Дж. Юл робить висновок: у будь-якому випадку, якщо регресія є лінійною, то формулу Браве можна застосовувати відразу, не турбуючись про дослідження нормальності розподілу [9, с. 481].

Науковець досліджував також проблему криволінійної регресії за допомогою методу найменших квадратів, розпочав з'ясувати й розкривати сутність багатофакторного кореляційного зв'язку (множинної кореляції), пропонував способи виявлення його наявності й вимірювання. У роботах 1897 і 1907 рр. [9; 10] він заклав основи теорії часткової кореляції та лінійної регресії для будь-якого числа змінних. Запропонований ним метод відразу став загальноприйнятим у практичних дослідженнях. Для коефіцієнта часткової кореляції учений вивів формулу, що застосовується і нині. Характерно, що його теоретичні дослідження багатофакторної кореляції та лінійної регресії супроводжувалися практичними розробками, зокрема обчисленням множинної кореляції за трьома і чотирма факторами на прикладі вивчення пауперизму залежно від розмірів допомоги бідним [2, с. 219–242].

Варто зазначити, що К. Пірсон, який зробив вирішальний внесок у розвиток теорії кореляції, критично поставився до результатів дослідження Дж. Юла щодо можливості використання методу найменших квадратів для визначення лінії регресії, ігноруючи вимоги закону нормального розподілу. К. Пірсон писав: підбираючи криву до ряду спостережень, про теоретичну придатність методу найменших квадратів можна стверджувати тільки у припущенні, що наші спостереження y , які залежать від даних x , підпорядковуються нормальному закону помилок. Це було доведено Гауссом. Тому теоретично виправдовуючи застосування методу найменших квадратів для добору лінії або поверхні для маси точок, ми повинні вважати, що вони впливають з нормального розподілу. Отже, не наполягаючи на нормальному розподілі та вимагаючи більш широкого застосування у наших обчисленнях кореляції принципу найменших квадратів, ми насправді відмовляємося від теоретичного обґрунтування точності, а практичний виграв одержуємо ціною втрати теоретичної значущості [11, с. 205].

У подальшому в статистичній літературі набув поширення погляд, що модель нормальної кореляції має не таке велике значення на практиці, яке їй спочатку надавали. Так, О. Чупров щодо практичного поширення співвідношень між випадковими змінними, які відповідають поняттю "нормальна кореляція", зазначав: наразі статистики не схильні

визнавати, що нормальна кореляція є загальним правилом або вона зустрічається часто. Проте випадки, де закон зв'язку не занадто різко відходить від нормальної кореляції, не такі рідкі, й найчастіше для спрощення роботи представляється можливим використовувати формули, що належать до випадку нормальної кореляції, без відчутної втрати точності результатів [4, с. 69]. Додамо, що нині розроблені різні методи та критерії, які дозволяють перевірити, чи є досліджувані сукупності приблизно нормальними або вибірками з нормальних сукупностей.

Дж. Юл рішуче виступив проти поняття “помилкова кореляція” (за англійською термінологією – “spurious correlation”), що було введено К. Пірсоном у 1897 р. у зв'язку з вимірюванням кореляції між індексними числами [12]. Дж. Юл зазначив: використання індексів для обчислення кореляції не означає, що кореляція між індексами або відношеннями вводить в оману. Коли індекси не корелюють, то виникає подібна “помилкова кореляція” між абсолютними величинами, і відповідь на питання, яка саме кореляція вводить в оману, – чи то між індексами, чи то між абсолютними величинами, – залежатиме від іншого питання: які саме величини безпосередньо відбивають досліджуване явище – чи то індекси, чи то абсолютні величини [13, с. 466].

Зазначимо, що наукові суперечності між Дж. Юлом і К. Пірсоном призвели до розриву їх дружніх стосунків, хоча раніше ці двоє вчених були добрими друзями.

Третім напрямом наукових статистичних досліджень Дж. Юла було розроблення математико-статистичних методів аналізу часових рядів. У 20-х роках ХХ ст. учений опублікував кілька праць, у яких розглянув методологічні питання статистико-математичного аналізу часових рядів. Найбільш відомі з них такі:

- “Проблема часової кореляції” (“On the Time Correlation Problem”) – критична стаття про диференціальний метод вивчення варіації [14].

- “Чому ми інколи отримуємо безглузді кореляції між часовими рядами? Вчення про вибірку та природу часових рядів” (“Why Do We Sometimes Get Nonsense-Correlations Between Time-Series? Study in Sampling and the Nature of Time-Series”) – дослідження форм безглузвих кореляцій (nonsense-correlations) [15]. (Зазначимо, що поняття “безглузді кореляції” ввів Дж. Юл).

Класичним є приклад щільного зв'язку ($r = 0,998$) між кількістю радіоприймачів і числом психічно хворих в Англії та Уельсі за 1924–1937 рр. Але хіба тільки жартома можна починати стверджувати, що слухання радіо тягне за собою збільшення кількості зареєстрованих психічно хворих або навпаки. Кореляція здається позбавленою змісту [3, с. 363–364].

- “Метод дослідження періодичності у рядах збурення з особливим посиленням на числа Вольфа” (“On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with Special Reference to Wolfer’s Sunspot Numbers” – використання авторегресійної моделі щодо моделі сонячних плям часових рядів [16]).

Ця праця, написана в 1927 р., мала найбільше значення для розвитку статистико-математичного аналізу часових рядів. М. Кендал наголошує, що з її виходом розпочався новий етап у дослідженні часових рядів, пов'язаний з ім'ям Дж. Юла, оскільки він уперше запропонував стохастичну модель аналізу часових рядів, яка стала вихідним пунктом для багатьох подальших досліджень у цій сфері [17, с. 9].

Вивчаючи кореляції часових рядів, Дж. Юл увів термін “корелограма”. Корелограма часового ряду – це графік коефіцієнтів кореляції (автокореляції) між поточними спостереженнями і попередніми з визначеними лагами у часі. При аналізі часових рядів на основі корелограм, основна увага приділяється виявленню залежності між спостереженнями в різні моменти часу. Якщо корелограма має різко виражений максимум або якусь іншу особливість, то можна стверджувати про наявність певної закономірності. Дж. Юл також заклав основи теорії автокореляції та авторегресії часових рядів. Учений указав, що часові ряди можна складати або способом застосування моделей плінної середньої (процес Юла), або авторегресійних моделей (авторегресійний ряд Юла) [14–16]. Зазначені поняття досі мають практичну цінність і є частиною удосконалених методів стохастичного аналізу часових рядів, зокрема спектрального аналізу й авторегресійних моделей.

До четвертого напрямку статистичних досліджень Дж. Юла слід зарахувати теоретичні розробки, пов'язані з питанням створення нових понять (термінів). Дж. Юл запропонував такі нові терміни: “коефіцієнт асоціації Q ” (Yule’s Coefficient of Association, Q). Дж. Юл позначив його першою буквою прізвища А. Кетле (Adolphe Quetelet, 1796–1874 рр.) – найвидатнішого представника статистичної науки першої половини ХІХ ст.), “коефіцієнт колігації Юла” (Yule’s Coefficient of Colligation), “безглузда кореляція” (nonsense-correlation), “розподіл Юла” (Yule Distribution), “корелограма Юла” (Yule Correlogram), “процес Юла” (Yule Process), “авторегресійний ряд Юла” (Yule Autoregressive Series) [1].

Багатогранність інтересів Дж. Юла виявлялась у найрізноманітніших прикладних дослідженнях. Він вивчав дані про вакцинації від віспи, закони Менделя та їх можливий зв'язок із міжрасовою спадковістю, залежність урожайності від ціни, бактеріальні методи при аналізі води, еволюцію та географічний розподіл рослин і тварин, різні демографічні й літературні проблеми.

Серед вищезазначених найбільш вагомою працею Дж. Юла була книга “Статистичне вивчення літературної лексики” (“The Statistical Study of Literary Vocabulary”), опублікована в 1944 р. У передмові до цієї книги Дж. Юл наголошував, що статистика літературної лексики довела наявність власних особливих проблем, своєрідних труднощів та джерел помилок, які, очевидно, ніхто не намагався систематично досліджувати [18]. У цій книзі Дж. Юл розглядає методологічні питання статистичного дослідження словесного складу мови, словникового запасу шляхом вимірювання довжини речень, визначення частоти появи слів у тексті, складання відповідних рядів розподілу і групувань та їх аналізу за допомогою різних статистичних методів: абсолютних і відносних величин, показників варіації, методів вимірювання взаємозв'язків, зокрема обчислення коефіцієнтів контингенції, кореляції, рангової кореляції. Значна увага приділена методологічним питанням застосування вибіркового методу при вивченні літературної лексики. Основним предметом вивчення були іменники у творах таких авторів: Фома Кемпійський (Thomas a Kempis, 1380–1471 pp.) – середньовічний німецький католицький монах та свя-

щеник; Жан Жерсон (Jean Gerson, 1363–1429 pp.) – видатний французький теолог XIV ст.; Томас Бабінгтон Маколей (Thomas Babington Macaulay, 1800–1859 pp.) – британський державний діяч, історик, поет і прозаїк вікторіанської епохи; Джон Баньян (John Bunyan, 1628–1688 pp.) – англійський письменник, баптистський проповідник та ін.

Видатний англійський учений-статистик Ф. Йейтс (F. Yates, 1902–1994 pp.), оцінюючи внесок Дж. Юла в розвиток статистичної науки, підсумовував у некролозі: хоча Дж. Юл не брав участі в розвитку жодної абсолютно нової галузі статистичної теорії, він зробив перші кроки у багатьох напрямках, що пізніше принесло плоди для подальшого прогресу. Він може справедливо вважатися одним з піонерів сучасної статистики [1].

Отже, внесок Дж. Юла у розвиток статистичної науки є значним. Він одним із перших почав широко застосовувати статистико-математичні методи, зокрема багатofакторний кореляційно-регресійний аналіз, для дослідження соціально-економічних явищ і процесів. Його творча спадщина назавжди ввійшла до арсеналу засобів світової статистичної науки.

Список використаних джерел

1. Williams R. H. George Udny Yule: Statistical Scientist [Electronic resource] / Williams R. H. — Access mode : <http://www.human-nature.com/nibbs/04/yule.html>
2. Юл Дж. Е. Теория статистики / Дж. Е. Юл. ; пер. з 7-го англ. вид. М. С. Горенштейн, Є. Г. Ліберман. — Харків, Дніпропетровськ : Держ. вид-во України, 1930. — 356 +(I – VIII) с.
3. Юл Дж. Э. Теория статистики / Юл Дж. Э., Кендэл М. Дж. ; пер. с англ. под ред. Ф. Д. Лившица – [14-е изд., пересмотр. и расшир.]. — М. : Госстатиздат ЦСУ СССР, 1960. — 779 с.
4. Чупров А. А. Основные проблемы теории корреляции. О статистическом исследовании связи между явлениями / Чупров А. А. — М. : Госстатиздат ЦСУ СССР, 1960. — 175 с.
5. Чекотовський Е. В. Історія статистичної науки : [навч. посіб.] / Е. В. Чекотовський. — К. : Знання, 2011. — 495 с. — (Вища освіта ХХІ століття).
6. Yule G. U. On the Association of Attributes in Statistics / G. U. Yule // Philosophical Transactions of the Royal Society. — 1900. — Series A, Vol. CXCIV. — P. 257–319.
7. Yule G. U. On the Methods of Measuring the Association between Two Attributes / G. U. Yule // Journal of the Royal Statistical Society. — 1912. — Vol. LXXV. — P. 579–642.
8. Yule G.U. On the theory of correlation / G.U. Yule // Journal of the Royal Statistical Society. — 1897. — Vol. LX. — P. 812–821.
9. Yule G. U. On the Significance of Bravais Formulae for Regression etc., in the case of Skew Correlation / G. U. Yule // Proceedings of the Royal Society. — 1897. — Vol. LX. — P. 477–489.
10. Yule G. U. On the Theory of Correlation for any Number of Variables, treated by a New System of Notation / G. U. Yule // Proceedings of the Royal Society of London. — 1907. — Vol. LXXIX. — P. 182–193.
11. Дружинин Н. К. Развитие основных идей статистической науки / Дружинин Н. К. — М. : Статистика, 1979. — 269 с.
12. Pearson K. On a Form of Spurious Correlation which may arise when Indices are used in the Measurement of Organs / K. Pearson // Journal of the Royal Statistical Society. — 1897. — Vol. LX. — P. 489–498.
13. Yule G. U. On the Interpretation of Correlations between Indices or Ration / G. U. Yule // Journal of the Royal Statistical Society. — 1910. — Vol. LXXXIII. — P. 644–647.
14. Yule G. U. On the Time Correlation Problem / G. U. Yule // Journal of the Royal Statistical Society. — 1921. — Vol. LXXXIV. — P. 5–18.
15. Yule G. U. Why Do We Sometimes Get Nonsense-Correlations Between Time-Series? — Study in Sampling and the Nature of Time-Series / G. U. Yule // Journal of the Royal Statistical Society. — 1926. — Vol. LXXXIX, Part I. — P. 1–64.
16. Yule G. U. On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series with Special Reference to Wolfer`s Sunspot Numbers / G. U. Yule // Philosophical Transactions of the Royal Society. — 1927. — Series A, Vol. CXCIV. — C. 267–298.
17. Кендэл М. Временные ряды / М. Кендэл ; пер. с англ. и предисл Ю. П. Лукашина — М. : Финансы и статистика, 1981. — 199 с.
18. Yule G. U. The Statistical Study of Literary Vocabulary / G. U. Yule. — Cambridge : Cambridge University Press, 1944. — 306 p.