УДК: 342.8+519.816
JEL Classification: F 47
doi: 10.31767/nasoa.3-4-2021.12

М. Є. СІНИЦЬКИЙ,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри економіко-математичних дисциплін
та інформаційних технологій,
Національна академія статистики, обліку та аудиту,
e-mail: papathryl@gmail.com,
ORCID: 0000-0002-2954-615X

Виборчі системи у цифрову епоху: базові проблеми та нові можливості. Частина III. Методи багатокритеріальних підходів для виборчих технологій

У частині I з теоретичних позицій розглянуто причини необхідності реформування виборчого процесу в Україні. Сформульовано мету та задачі дослідження. Проаналізовано класичні математичні моделі виборчих технологій, обрані для порівняння, із сучасними підходами.

Частина II містить аналіз принципів вибору методик вимірювання результатів схвального голосування. Розглянуто питання визначення вербально-числової шкали, оцінювання узгодженості індивідуальних рішень, що приймаються виборцями, та застосування статистичних критеріїв для отримання консолідованого результату.

У частині III розглянуто моделі, обрані для розрахунків підсумкового виборчого рейтингу. Наведено математичні алгоритми багатокритеріального вибору на основі кваліметричного підходу та парних порівнянь за чотирьома варіантами шкал. Описано протоколи визначення консенсусних альтернатив з використанням методу Topsis, медіани Кемені – Янга, евристичної процедури Шульце та нечіткомножинного підходу.

Остання, IV частина містить результати апробації обраних протоколів системи схвального голосування для моделі виборів з 4 кандидатів за 7 питаннями виборчого бюлетеня. Наведено алгоритм і результати генерації за методом Монте-Карло масивів вихідних даних розміром 10000 записів, які мають рівномірний та нормальний розподіли з трьома варіантами параметру зміщення. Для виявлення чутливості досліджуваних протоколів до порушень транзитивності профілів індивідуальних переваг здійснено трансформацію первинних масивів даних шляхом заміни нетранзитивних профілів на еквівалентну кількість транзитивних без надання переваги будь-якій альтернативі.

На основі оцінки кореляції підсумкових рейтингів, їх чутливості до типу розподілу і до порушень транзитивності індивідуальних суджень зроблено висновок про доцільність використання медіани Кемені для визначення підсумків голосування. Застосування запропонованого методу трансформації первинних даних також уможливлює використання протоколів Кондорсе, Доджсона, Сааті та Шульце.

Результати дослідження свідчать про існування принципової можливості переходу до нової цифрової парадигмі виборчого процесу, основаної на схвальному принципі голосування.

Ключові слова: *суспільний вибір, схвальне голосування, класичні виборчі технології, узгодженість думок виборців, нечислова статистика, порядкові шкали, арифметизація шкал, узгодженість профілів, коефіцієнт Кендала, лінійна згортка, ваги критеріїв, нелінійне шкалювання, індекси узгодженості, вербально-кількісні шкали, кваліметрія, парні порівняння, медіана Кемені, евристика Шульце, нечіткі множини, метод Монте-Карло, профілі голосування, транзитивність, p-value*.

M. SINYTSKYI,
PhD (Phys.-Math.) Associate Professor,
Associate Professor of Economic
and Mathematical Disciplines and information technology,
National Academy of Statistics, Accounting and Audit

Electoral Systems in the Digital Age: Underlying Challenges and New Opportunities. Part III. Methods of Multi-Criteria Approaches to Electoral Technologies

The article is devoted to the problem of democratic development of Ukraine.

The reasons for the need for a radical transformation of the electoral process in Ukraine have been considered from a theoretical standpoint. The main goal and sub-goals of the research have been formulated. The classical mathematical models of electoral technologies, selected for comparison with modern approaches have been described.

The basic principles of selection of methods for measuring the results of approval voting have been analyzed. The issues of constructing a verbal-numerical scale, assessing the consistency of voter decisions and applying statistical criteria to obtain a consolidated result have been considered.

The models selected for calculating the final election rating are analyzed. Mathematical algorithms of multicriteria selection based on the qualimetric approach and pairwise comparison on four variants of scales are given. Protocols for determining consensus alternatives using the Topsis method, the Kemeni – Young median, the Schulze heuristic procedure, and the fuzzy set approach are described.

The results of approbation of the selected protocols of approval of the voting system for the election model of 4 candidates on 7 questions of the ballot paper are given. The algorithm and the results of generating by the Monte Carlo method arrays of initial data with a size of 10,000 records, having a uniform and normal distribution with three variants of the bias parameter, are presented. To identify the sensitivity of the studied protocols to violations of the transitivity of individual preference profiles, the primary data arrays were transformed by replacing the nontransitive profiles with an equivalent number of transitive ones without presenting a preference to any alternative. Based on the assessment of the correlation of the final ratings, their sensitivity to the type of distribution and to violations of the transitivity of individual judgments, it was concluded that it is advisable to use the Kemeny median to determine the voting results. The use of the proposed method for transforming primary data also makes it possible to use the Condorcet, Dodgson, Saati and Schulze protocols. The results of this study indicate that there is a fundamental possibility of transition to a new digital paradigm of the electoral process based on the approving principle of voting.

Keywords: *public choice, positive voting, classical election technologies, coherence of voters' opinions, non-numerical statistics, ordinal scales, scale arithmetic, profile consistency, Kendall coefficient, linear convolution, criterion weights, nonlinear scaling, consistency indices, verbal-quantitative scales, qualimetry, pairwise comparisons, Kemeni median, Schulze heuristics, fuzzy sets, Monte Carlo method, voting profiles, transitivity, data consistency, p-value.*

Кваліметричний підхід. Застосування кваліметричного підходу у виборчих технологіях можна розглядати як інструмент визначення комплексного показника відповідності кандидата певним вимогам (якості об'єкта) за частковими показниками, включеними до виборчого бюлетеня. Звичайною методикою є лінійна згортка часткових показників [1, с. 5]:

$$QV_j = \sum_{s=1}^{M} \rho_s q_{js}, \qquad (48)$$

де QV_j – комплексний показник якості j-го об'єкта; q_{js} – значення часткового показника якості j-го об'єкта за s-ю властивістю; ρ_s – вага s-го часткового показника якості.

Формула (48) є лінійною моделлю властивостей (що вимагає обґрунтування) й може застосуватися, коли q_{js} є кількісними величинами. Хоча деякі автори [2], ігноруючи обмеження для порядкової шкали, обчислюють суми та ваги, оперуючи з рангами значень індивідуальних показників якості.

За нечислових вимірювань величини ρ_s як правило визначаються експертним шляхом із використанням методу парних порівнянь. У виборчих технологіях майбутнього це питання може стати одним із завдань Центральної виборчої комісії (ЦВК), яка має ініціювати проведення відповідних соціологічних досліджень, оброблення даних за участю спеціалістів з інженерії знань та оформлення у законодавчий спосіб потрібного рішення. Значення q_{js} подається в загальній кількісно-вербальній шкалі. В роботі [3] продемонстровано метод арифметизації такої шкали з використанням модифікованої авторами вагової функції оператора *OWA* (*Ordered Weighted Averaging*) [4]:

$$Q(s) = \int\left\{1{,}5 + \left[s \cdot \frac{m-1}{T}\right]\right\} \tag{49}$$

де s – номер позиції часткового показника в профілі якості; m – кількість поділків шкали; T – кількість часткових показників у профілі якості.

Для нашого дослідження маємо: $m = 5$; $T = 7$. Звідки, позначивши поділки вербальної шкали (V_s) у порядку зростання інтенсивності прояву якості літерами *E*, *D*, *C*, *B*, *A*, за формулою (49) отримуємо шкалу вимірювання значень вагової функції оператора *OWA* (табл. 1).

Таблиця 1

Вербально-кількісна шкала значень вагової функції оператора OWA

s	1	2	3	4	5	6	7
$Q(s)$	2	3	3	4	4	5	5
$V(s)$	D	C	C	B	B	A	A

Джерело: розробка автора

Тобто комплексний показник якості має визначатися за вербальною шкалою, рівням якої відповідає вагова функція $Q(s)$ = {D,C,C,B,B,A,A}.

Оператор *OWA* представлений максимінною згорткою, що емулює обчислення середнього для вербальних даних за формулою:

$$OWA = \max[\min_{s=1}^{T}(Q(s), \tilde{q}_s)], \tag{50}$$

тут $\tilde{q}_s$ – значення одиничного показника, що займає s-те місце у профілі, ранжированому за зменшенням рівня якості.

Припустимо, що виборець оцінив якості кандидата (склав його якісний профіль) у такий спосіб: {*q1,q2,q3,q4,q5,q6,q7*} = {A,E,B,E,C,C,D}, або у ранжированому за зменшенням вигляді {ABCCDEE}. Тоді за формулою (44) отримуємо значення комплексного показника

$$OWA = max[min(\{DCCBBAA\},\{ABCCDEE\})] = max(DCCCDEE) = C.$$

Автори [3] розглянули також можливість формування зваженого профілю якості. Для цього ваги позначають цілими числами й отримують ранжирований профіль із числом повторів позицій, що дорівнюють вагам відповідних показників якості. Наприклад, нехай ваги показників якості відповідають їх порядковому номеру, тобто від 1 до 7. Тоді вище розглянутий персональний профіль виглядатиме як {A, EE, BBB, EEEE, CCCCC, CCCCCC, DDDDDDD}, або у ранжированому вигляді {ABBBCCCCCCCCCCCDDDDDDDEEEEEE}. Оскільки число позицій у профілі збільшилась до 28, то відповідно має бути перерахована й вагова функція оператора *OWA* (табл. 2).

Таблиця 2

Розширена кількісно-вербальна шкала значень вагової функції оператора OWA

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Q(s)$	2	2	3	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8	9	10
$V(s)$	R	R	P	P	O	O	N	M	M	L	L	K	K	J	H
s	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28		
$Q(s)$	10	11	11	12	12	13	14	14	15	15	16	16	17		
$V(s)$	H	G	G	F	F	E	D	D	C	C	B	B	A		

Джерело: розробка автора

Значення комплексного показника складатиме:

$OWA = Max[Min$({RRPPOONMMLLKKJHHGGFFEDDCCBBA}, {AB-BBCCCCCCCCCCCDDDDDDDEEEEEE })] =

= Max(RRPPOONMMLLKKJHHGGFFEDEEEEEE) = D.

Крім того, якщо дані трансформовані у чисельну шкалу, то для агрегації значень одиничних кількісних показників якості за умови рівності ваг автори [3] пропонують використовувати медіану варіаційного ряду:

$$QV_j = med\,(q_{js}), \tag{51}$$

або, що краще, – медіану середніх Уолша, для обчислення якої вихідні дані окрім сортування мають бути трансформовані за формулою [5, с. 102]:

$$\tilde{q}_{js} = \frac{1}{2}(q_{jsl} + q_{jsm}),\ l = m, \tag{52}$$

Методи парного порівняння (МПП). Ці методи традиційно використовуються для розв'язання задачі багатокритеріального вибору альтернатив в умовах неможливості побудови цільової функції. Вважається, що парні порівняння приводять до меншої кількості помилок, ніж безпосереднє оцінювання усіх альтернатив відразу. Ідея парного порівняння народилася в античну добу і була використана Борда та Кондорсе (див. частину І статті). Цей метод інтенсивно розвивався в напрямах вибору оптимальних шкал та агрегації даних, отриманих за локальними критеріями. В табл. 3 наведено характеристики популярних точкових МПП, використовуваних при прийнятті групових експертних рішень:

Таблиця 3

Характеристики класичних методів парного порівняння

Варіанти МПП	Відношення альтернатив	Параметри	
	Умови, що мають бути виконані	Елементи матриці парних порівнянь	Вага альтернативи, w_s
1	2	3	4
1. На основі методу налаштовуваної фіксованої переваги [5]	$X_j > X_k$, $X_j < X_k$, $X_j \approx X_k$,		За строгого ранжирування (неможливості) $X_j \approx X_k$, $w_s = \frac{2 \cdot [(T-1) \cdot (1+\Delta) + 2 - s]}{T \cdot [2\,\Delta \cdot (T-1) + T + 1)}$ (56) За нестрогого ранжирування (можливості $X_j \approx X_k$,):

Продовження табл. 3

1	2	3	4
	$a_{jk} + a_{kj} = 2,$ $j,k = \overline{1,T}.$ (53) $X_j > X_k,$ $X_j < X_k,$ $X_j \approx X_k,$	$a_{jk} = \begin{cases} 1+\Delta; \\ 1-\Delta; \\ 1; \end{cases}$ $a_{jj} = 1;$ (54) де $\Delta = \dfrac{T\cdot(\gamma-1)}{(T-1)\cdot(\gamma+1)}$ (55) γ – відношення (перевага) наступного члена ранжированого ряду до попереднього	1. Задають значення величин T і γ та будують матрицю парних порівнянь за правилами (53), (54). 2. Визначають рівні важливості крайніх альтернатив (I_1 і I_T) як рядкові суми матриці парних порівнянь: $I_j = \sum_{\kappa=1}^{T} a_{jk}$. (57) 3. Для перевірки знаходять значення величини Δ шляхом розв’язання рівняння $\gamma = \dfrac{I_1}{I_T} = \dfrac{\sum_{\kappa=1}^{T} a_{1k}}{\sum_{\kappa=1}^{T} a_{Tk}}$ (58) з урахуванням (54) відносно Δ. 4. Якщо потрібно, модифікують матрицю парних порівнянь із використанням отриманої величини Δ. 5. Визначають рівні важливості всіх альтернатив за (56). 6. Розраховують ваги альтернатив за формулою: $w_s = \dfrac{I_s}{\sum_{s=1}^{T} I_s}$ (59) За строгого ранжирування (неможливості $X_j \approx X_k$) $w_s = \dfrac{2\cdot[\gamma\cdot(T-1)-(s-1)\cdot(\gamma-1)]}{(T+1)\cdot T\cdot(T-1)}$ (60) При γ = T (60) переходить у відому формулу П. Фішбер на [6], яка, мабуть, найчастіше використовується науковцями для арифметизації вербальних шкал За нестрогого ранжирування (можливості $X_j \approx X_k$): 1. Визначають групи важливості членів ряду (і) (еквівалентні альтернативи отримують однаковий номер).

Продовження табл. 3

1	2	3	4
2. На основі методу налаштовуваної спадної арифметичної прогресії [7]			2. Будують рівняння: $$T \cdot w_{Ts} + \sum_{i=1}^{G} T_i \cdot (G-i) \cdot \Delta_w = 1, \quad (61)$$ де w_{Ts} – вага найменш важливої групи; G – кількість груп важливості членів ряду; T_i – число пов'язаних альтернатив i-ї групи важливості; Δ_w – різниця між вагами альтернатив, що входять до суміжних груп важливості, (знаменник арифметичної прогресії): $$\Delta_w = \frac{w_{Ts} \cdot (\gamma - 1)}{T-1},$$ і розв'язують рівняння (61) відносно w_T. 3. Використовуючи вираз $$w_{is} = w_{Ts} + (G-i) \cdot \Delta_w; \; i = \overline{1,G},$$ знаходять ваги альтернатив $$w_s = \frac{w_{is}}{\sum_{i=1}^{T} w_{is}} \quad (63)$$ За строгого ранжирування (неможливості $X_j \approx X_k$): 1. Задають значення величин T і γ. 2. Знаходять величину ω за формулою:
3. На основі методу налаштовуваної спадної геометричної прогресії [8, 9]	$X_j > X_k$, $X_j < X_k$		За строгого ранжирування (неможливості $X_j \approx X_k$): 1. Задають значення величин T і γ. 2. Знаходять величину ω за формулою: $$\omega = 10^{\frac{\lg(1/\gamma)}{T-1}}. \quad (64)$$ 3. Визначають ненормовану вагу найважливішої альтернативи: $$w_1 = \frac{1-\omega}{1-\omega^T}. \quad (65)$$ 4. Розраховують ненормовані ваги менш важливих альтернатив:

Продовження табл. 3

1	2	3	4
			$w_s = w_1 \cdot \omega^{s-1}$, $s = \overline{1,T}$ (66) 5. Нормують ваги як: $\widetilde{w}_s = \dfrac{w_s}{\sum_{s=1}^{T} w_s}$ (67)
4. На основі гібридних вербально-числових шкал [13]	$X_j > X_k$, $X_j < X_k$, $X_j \approx X_k$, $a_{jk} = 1/a_{kj}$; (68) $a_{jk} = a_{jl} * a_{lk}$; (69) якщо $a_{jk} \geq a_{jl}$ і $a_{jl} \geq a_{lk}$, то м.б. $a_{jl} \geq a_{lk}$ (70)	1. Сааті подібні шкали: $a_{jk} = (1+ \lvert\vartheta\rvert k_S)^{sing\vartheta}$, (71) де ϑ – псевдочисловий символ поділку вербальної шкали: $\vartheta = \pm\ \overline{1,\ 8}$; k_S – ; k_S – масштабний коефіцієнт; за $k_S = 1$ маємо шкалу, запропоновану Т. Сааті; $a_{jj} = 1$. 2. Шкала Брука: $a_{jk} = \overline{a} + \vartheta \cdot k_S$, (72) де – параметр центру; 3. Логістична шкала: $a_{jk} = 2/[1+\exp(-\mu \cdot \vartheta)]$, (73) де μ – параметр крутизни; 4. Шкала Лутсма $a_{jk} = c^{\vartheta}$, (74) де c – степеневий параметр.	1. Метод обчислення нормованого головного власного вектора матриці парних порівнянь [10–12]. При виконанні умов однорідності (69) матриця парних порівнянь (A) має одиничний ранг і власне число, що дорівнює T. За невеликої неоднорідності у матриці А з'являється декілька власних векторів, проте головний $(\vec{W} = \{w_1,\ldots,w_s,\ldots,w_T\}^t)$ з них обчислюється ітераційним шляхом з рівняння: $A \cdot \vec{W} = \lambda_{\max} \vec{W}$, (75) де $\lambda_{\max}$ – максимальне власне число. Ітераційний процес [10] $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{A^k \vec{e}}{\vec{e}^{\,t} A^k \vec{e}} = const \cdot \vec{W}$, (76) де $\vec{e} = (1,\ldots,1)^t$ – одиничний вектор; k – номер ітерації; t – символ транспонування, звичайно закінчують при досягненні точності $\vec{e}^{\,t}(w^{(k)} - w^{(k-1)}) \leq 0{,}01$ (77) 2. Метод геометричних середніх: а) з нормалізацією [14]: $w_s = \dfrac{(\prod_{k=1}^{T} a_{sk})^{1/T}}{\sum_{s=1}^{T}((\prod_{k=1}^{T} a_{sk})^{1/T})}$; (78) б) без нормалізації [12]: $w_s = (\prod_{k=1}^{T} a_{sk})^{1/T}$, (79) що усуває зміну рангів при видаленні якоїсь альтернативи з розгляду

Примітка. $X_j > X_k$ означає перевагу альтернативи X_j над альтернативою X_k, а $X_j \approx X_k$ – їх еквівалентність; s – ранг альтернативи у ранжированому за зменшенням важливості ряду; T – кількість альтернатив.

Відмітимо, що методи 2–3, відображені у табл. 3, представляють варіант визначення ваг альтернатив, які попередньо були ранжировані, а методи 1 і 4 призначені для ранжирування та зважування альтернатив у одній процедурі. Проблема криється в тому, що матриці парних порівнянь на практиці рідко бувають узгодженими за (68)–(70), тому багато прихильників методу аналізу ієрархій (МАІ) шукають способи послаблення чи обходу цих вимог. Т. Сааті одним із перших запропонував метод обчислення головного власного вектора через геометричні середні елементів матриці A [11].

Втім проблема залишається. Суб’єктивність оцінювання ступеня переваги в МАІ часто приводить до неузгодженості, а відтак до неможливості ранжування (зважування) альтернатив. Через це МАІ має величезну кількість модифікацій [15–23]. Трендом досліджень наразі можна вважати впровадження в МАІ інтервальних і нечітких оцінок переваг альтернатив людьми, що є більш природним шляхом врахування невизначеності при прийнятті рішень [24].

Вимагати попарного порівняння кандидатів від кожного з виборців у великомасштабних заходах навряд чи доцільно, але це має сенс при визначенні узагальненого рейтингу на основі статистичних або нечітких даних, що представляють групові рішення.

В дослідженні, результати якого надано в цій статті, зроблено спробу за допомогою МПП отримати результативне ранжирування кандидатів із використанням відношень сум місць (балів), визначених кандидатам виборцями за різними критеріями, представлених у шкалах (71) і (73) при k_S =1 і μ = 0,5 відповідно (табл. 4).

Таблиця 4

Вербально-числові шкали ранжирування кандидатів за допомогою методу парних порівнянь

Лінгвістична форма	ϑ	$a_{jk}(\vartheta,k_s)$	$a_{jk}(-\vartheta,k_s)$	$a_{jk}(-\mu,\vartheta)$	$a_{jk}(-\mu,-\vartheta)$
Немає переваги	0	1	1	1,000	1,000
Середня перевага	±2	3	1/3	1,462	0,538
Сильна перевага	±4	5	1/5	1,762	0,238
Дуже сильна перевага	±6	7	1/7	1,905	0,095
Надзвичайна перевага	±8	9	1/9	1,964	0,036

Джерело: розробка автора

Метод TOPSIS (*Technique for Order Preference by Similarity to the Ideal Solution*). Цей метод призначений для ранжирування багатокритеріальних альтернатив виходячи із ідеї, що найкраща альтернатива має бути одночасно максимально наближена до найкращого розв’язку та максимально віддалена від найгіршого [25, с. 128].

В останні роки метод *TOPSIS* був адаптований для роботи з нечіткими даними [26] та став використовуватися в комбінації з МАІ [27]. Для нашої задачі його використання доцільне на етапі агрегації думок виборців. Деталі реалізації *TOPSIS* засобами електронних таблиць наведено у [28, с. 113].

***Метод Кемені – Янга.* Цей метод** (“медіана Кемені”) [29] дозволяє знайти таке результативне нестроге ранжирування (L), сумарна відстань (LK) від якого до всіх індивідуальних ранжирувань виборців є мінімальною, тобто

$$LK = \arg\min_{L} \sum_{i=1}^{n} R_c(L, L_i), \tag{80}$$

де $R_c\,(L, L_i)$ – відстань між ранжируваннями L і L_k.

Величину $R_c\,(L, L_i)$ (відстань Кемені) визначають за допомогою матриць бінарних відношень, яка в нашій постановці може бути сформована зі знаків різниць балів, виставлених виборцями двом порівнюваним кандидатам за деякою шкалою

$$A^{(i)} = \| a_{ijk} \|, \; i = \overline{1,n}; \; j = \overline{1,m}; \; k = \overline{1,m}, \tag{81}$$

де результати парних порівнянь кодуються за формулою

$$a_{ijk} = \begin{cases} 1, & if \quad X_j \succ X_k \\ 0, & if \quad X_j \approx X_k \\ -1, & if \quad X_j \prec X_k \end{cases}. \tag{82}$$

Відстань Кемені визначається кількістю парних перестановок об’єктів місцями, необхідних для перетворення одного ранжирування в інше, помноженою на чотири.

Метод Шульце. Був запропонований Маркусом Шульце у 1997 р. як евристична процедура підрахунку голосів за технологією схвального голосування, що передбачає ранжирування кандидатів виборцем із можливістю встановлення однакових пріоритетів. Метод враховує як прямі перемоги кандидата при безпосередніх парних порівняннях, так і непрямі перемоги. Останні розраховуються за ланцюжком переваг (орієнтованих дуг) як кількісне значення “сили шляху” за графом бінарних відносин парних перемог за Кондорсе (рисунок). Врахування параметра “сили” всіх непрямих перемог дозволяє виявити переможця з будь-якої пари кандидатів, а переможцем за Шульце стає той, хто перемагає всіх конкурентів.

Процедура ґрунтується на добре відомому з теорії графів методі обчислення найсильнішого шляху. Фактично йдеться про парне порівняння кандидатів, де за міру переваги береться не відношення ваг альтернатив, як у МАІ, а мінімальне значення ваги ланцюжка (дуги) з тих, що входять до шляху максимальної сили.

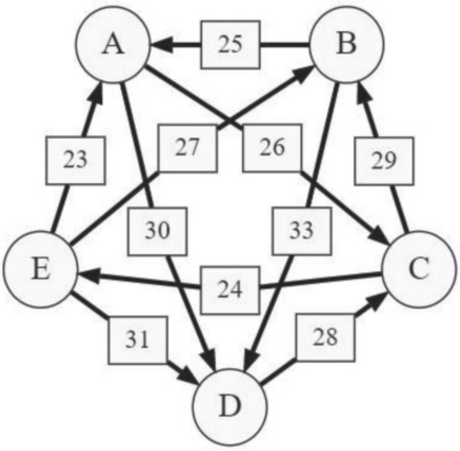

Рис. Орієнтований граф помічений парними перевагами.
Джерело:[30]

Як приклад, на рис. 1 представлено граф парних переваг, визначених для п’ятьох кандидатів 45 виборцями. Стрілки дуг визначають напрям переваги й будуються за таким правилом. Якщо b_{jh} – число виборців, які вважають кандидата j кращим за кандидата h (див. формулу (2)), то стрілка має мітку (вагу) b_{jh} і ставиться лише за умови, що $b_{jh} > b_{hj}$. Найсильнішим шляхом вважається шлях із найбільшим значенням сумарної ваги, а за його силу (p) приймається мінімальна вага з його ланок, тобто для всіх $i = 1,\ldots, (n - 1)$ має місце співвідношення: $b_{i,i+1} > b_{i+1,i}$ та $b_{i,i+1} \geq p$, де p – сила шляху, $(n - 1)$ – кількість дуг, що складають шлях між порівнюваними вузлами. Обраховані за цим алгоритмом сили найсильніших шляхів наведено у табл. 5.

Таблиця 5

Сили найсильніших шляхів графу, представленого на рис. 1

	$p[*,A]$	$p[*,B]$	$p[*,C]$	$p[*,D]$	$p[*,E]$
$p[A,*]$		28	28	30	24
$p[B,*]$	25		28	33	24
$p[C,*]$	25	29		29	24
$p[D,*]$	25	28	28		24
$p[E,*]$	25	28	28	31	

Джерело: [30]

З табл. 5 слідує, що $p[A,B]=28 > p[B,A] = 25$; $p[A,C]=28 > p[C,A] = 25$; $p[A,D]=30 > p[B,A] = 25$; $p[A,E]=24 < p[E,A] = 25$, тобто рейтинг кандидатів за методом Шульце є таким: $E > A > B > C > D$.

В разі нічейного результату при порівнянні сил найсильніших шляхів Шульце запропонував застосовувати випадковий вибір чи ітераційне уточнення шляхом видалення кандидатів, що не входять до набору Шварца [31] (не зможуть досягнути всіх інших). В такий спосіб цей метод позбавляється від парадоксу Кондорсе.

Для оброблення даних за методами медіани Кемені та Шульце в представленому в статті дослідженні було використано комплекс програм на мові *R* у середовищі *R-Studio* [32–34].

Нечітко-множинний підхід. Він складається з декількох кроків. *На першому кроці* відбувається включення виборцями кандидатів до *k*-го поділку лінгвістичної шкали *s*-ї властивості (ознаки) за відносними частотами a_{ks} :

$$a_{ks} = \frac{n_{ks}}{\sum_{k=1}^{K_S} n_{ks}}, \tag{81}$$

де n_{ks} – кількість кандидатів, що отримали порядкову оцінку рівня k для s-ї властивості; $K_S = K$ – кількість поділків s-ї лінгвістичної шкали, і за умови нормування: $\sum_{k=1}^{K_S} a_{ks} = 1$ будуються K повних ортогональних семантичних просторів (ПОСП) з назвами X_s і терм-множинами X_{ks}, $k = \overline{1,K}; K = 5,\ s = \overline{1,Q}; Q = 7$, для яких нечіткі оцінки $\tilde{X}_s^{(m)}$ m-го кандидата описуються функціями належностей $\mu_{\tilde{X}_s}^{(m)}(x)$, що оцінюють ступені істинності можливих значень s-ї властивості m-го кандидата на універсумі $U = [0; 1]$ [35].

Побудова системи ПОСП виглядає таким чином. Згідно з [36], функції приналежності ($\mu_{\tilde{X}_S}(x)$ кандидата до нечіткої множини (НМ), що описує s-ту вла стивість у межах k-го поділку лінгвістичної шкали (синоніми: категорії, рівню, терму), представляють у кусково-лінійній (*LR*)-формі, а саме у вигляді двох α-перерізів нечітких чисел (НЧ): на рівні $\alpha = 0$ (інтервал $[a_{k1} +$ $a_{kL}, a_{k1} + a_{kR}]$) та $\alpha = 1$ (інтервал $[a_{k1}, a_{k1}]$)[1]:

$$\mu_{\tilde{X}_k}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a_{k1} - x}{a_{kL}}\right), & якщо \quad 0 \le \dfrac{a_{k1} - x}{a_{kL}} \le 1,\ a_{kL} > 0; \\ R\left(\dfrac{x - a_{k2}}{a_{kR}}\right), & якщо \quad 0 \le \dfrac{x - a_{k2}}{a_{kR}} \le 1,\ a_{kR} > 0; \\ 1, & якщо \quad \dfrac{a_{k1} - x}{a_{kL}} < 0 \cap \dfrac{x - a_{k2}}{a_{kR}} < 0; \\ 0, & якщо \quad \dfrac{a_{k1} - x}{a_{kL}} > 1 \cup \dfrac{x - a_{k2}}{a_{kR}} > 1, \end{cases} \tag{82}$$

де L, R – значення лівої та правої меж функції належності (ФН) НЧ $\tilde{X}_k^{(m)}$ відповідно, або у символічному запису: $\mu_k(x) \equiv (a_{k1}, a_{k2}, a_{kL}, a_{kR})$; $k = \overline{1, K_s}$; $K_s = K = 5$, де a_{k1}, a_{k2} – ліва й права межі інтервалу толерантності (ядра ФН) відповідно; $a_{kL} = a_{k1} - x_{min}$, $a_{kR} = x_{max} - a_{k2}$ – лівий та правий коефіцієнти нечіткості (крила) ФН відповідно; x_{min} і x_{max} – мінімальне та максимальне значення аргумента ФН (носій, або *Supp* ($X_k = \{\mu_k(x) > 0\}$), а координати кардинальних точок ФН визначаються за рівняннями:

$$x_{kL}(\alpha) = a_{k1} - a_{kL}(1 - \alpha), \tag{83}$$

$$x_{kR}(\alpha) = a_{k1} + a_{kR}(1 - \alpha). \tag{84}$$

[1] Тут і у формулах (82)–(85) індекс s для спрощення опущено.

Нагадаємо, що при $a_1 = a_2$ (LR)-число називається унімодальним; якщо $a_1 = a_2 = 0$, то $L = R = 0$; якщо $L = R = 1 - x$, то (LR)-число називається T-числом, а при $a_1 = a_2$ – нормальним трикутним НЧ. При цьому ФН будуються так, щоб площі фігур, обмежених графіками цих функцій та віссю абсцис, дорівнювали величинам a_{ks}.

Розрахункові формули значень ФН (82) мають вигляд [36]:

$$\mu_k = \begin{cases} 1-\dfrac{a_k}{2},\ 1,\ a_k,\ 0, & \text{якщо} \quad a_k \le a_{k-1}; \\ 1-a_k+\dfrac{a_{k-1}}{2},\ 1,\ a_{k-1},\ 0, & \text{якщо} \quad a_k > a_{k-1}; \end{cases}$$

$$\begin{matrix}\mu_{k-1}\\ \mathrm{M}\\ \mu_2\end{matrix} = \begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{k-2} a_l + \dfrac{a_{k-2}}{2},\ 1-\dfrac{3a_k}{2},\ a_{k-2},\ a_k, & \text{якщо} \quad a_{k-1} \ge \max(a_k,\ a_{k-2}); \\ 1-a_k-\dfrac{a_{k-1}}{2},\ 1-\dfrac{3a_k}{2},\ a_{k-2},\ a_k, & \text{якщо} \quad a_k < a_{k-1} < a_{k-2}; \\ \sum\limits_{l=1}^{k-2} a_l + \dfrac{a_{k-2}}{2},\ 1-a_k-\dfrac{a_{k-1}}{2},\ a_{k-2},\ a_{k-1}, & \text{якщо} \quad a_{k-2} < a_{k-1} < a_k; \\ 1-a_k-\dfrac{a_{k-1}}{2},\ 1-a_k-\dfrac{a_{k-1}}{2},\ a_{k-1},\ a_{k-1}, & \text{якщо} \quad a_{k-1} \le \min(a_k, a_{k-2}); \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} 0,\ \dfrac{a_1}{2},\ 0,\ a_1,\ 0, & \text{якщо} \quad a_1 \le a_2; \\ 0,\ a_1-\dfrac{a_2}{2},\ 0,\ a_2, & \text{якщо} \quad a_1 > a_2. \end{cases} \tag{85}$$

Побудовані у такий спосіб ПОСП (кількість яких визначається як число властивостей × число кандидатів) є базовим інструментом вимірювання прояву властивостей кандидатів за нечіткою шкалою, тобто способом призначення властивостям кандидатів формалізованих нечітких оцінок (у вигляді ФН) у відповідності до обраних виборцями поділків лінгвістичної шкали.

На другому кроці отримані вище первинні нечіткі оцінки згортаються за виборцями в межах кожної характеристики кандидата до узагальненої нечіткої оцінки $\tilde{X}_{sk}^{(m)}$, оптимальної за Парето [36]. Розрахункові формули для (LR)-параметрів ФН цієї оцінки мають вигляд

$$a_{1s}^{(m)} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_{1si}^{(m)};\ a_{2s}^{(m)} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_{2si}^{(m)};\ \ a_{Ls}^{(m)} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_{Lsi}^{(m)},$$

$$a_{Rsk}^{(m)} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i a_{Rski}^{(m)}, \tag{86}$$

де ω_i – ваговий коефіцієнт i-го виборця; $a_{1si}^{(m)}; a_{2si}^{(m)}; a_{Lsi}^{(m)}, a_{Rsi}^{(m)}$ – кардинальні точки ФН (LR)-нечіткого числа, що відповідає наданій i-м виборцем порядковій оцінці s-ї властивості m-го кандидата.

Далі для отримання узагальненої нечіткої оцінки $\tilde{X}_s^{(m)}$, що характеризує групове ставлення виборців до кандидата m, нечіткі оцінки $\tilde{X}_s^{(m)}$ згортаються за індексом s, тобто за властивостями кандидатів:

$$\tilde{A}^{(m)} = w_1 \otimes \tilde{X}_1^{(m)} \oplus \ldots \oplus w_s \otimes \tilde{X}_s^{(m)} \oplus \ldots \oplus w_Q \otimes \tilde{X}_Q^{(m)}, \tag{87}$$

де $\tilde{A}^{(m)}$ – нечітка рейтингова оцінка m-го кандидата; $\tilde{X}_s^{(m)}$ – нечітка рейтингова оцінка ознаки X_s m-го кандидата; w_s – вага s-ї ознаки кандидата; $\oplus, \otimes$ – позначення операторів сумування та множення НЧ відповідно.

Крім того, розраховуються нечіткі значення першого та останнього поділку лінгвістичної шкали, $\tilde{B}_1$ тобто і $\tilde{B}_k$, що потрібно для подальшої нормалізації

$$\tilde{B}_1 = w_1 \otimes \tilde{X}_{11} \oplus ... \oplus w_K \otimes \tilde{X}_{1K}, \quad (88)$$

$$\tilde{B}_K = w_1 \otimes \tilde{X}_{K1} \oplus ... \oplus w_K \otimes \tilde{X}_{KK}, \quad (89)$$

де $w_k, (k=\overline{1,K})$ – вага k-го поділку лінгвістичної шкали[2].

Згідно з [37, с. 66] класичні арифметичні операції (за принципом узагальнення Заде) з трапецевидними НЧ *LR*-типу мають вигляд:

$$\widetilde{X}_1 \oplus \widetilde{X}_2 = \left(\mathrm{a}_{1si}^{(1)} + \mathrm{a}_{1si}^{(2)}, \mathrm{a}_{2si}^{(1)} + \mathrm{a}_{2si}^{(2)}, \mathrm{a}_{Lsi}^{(1)} + \mathrm{a}_{Lsi}^{(2)}, \mathrm{a}_{Rsi}^{(1)} + \mathrm{a}_{Rsi}^{(2)}\right), \quad (90)$$

$$\widetilde{X}_1 \otimes \widetilde{X}_2 = \left(\mathrm{a}_{1si}^{(1)} \cdot \mathrm{a}_{1si}^{(2)}, \mathrm{a}_{2si}^{(1)} \cdot \mathrm{a}_{2si}^{(2)}, \mathrm{a}_{1si}^{(1)} \cdot \mathrm{a}_{Rsi}^{(2)} + \mathrm{a}_{1si}^{(2)} \cdot \mathrm{a}_{Lsi}^{(1)}, \mathrm{a}_{2si}^{(1)} \cdot \mathrm{a}_{Rsi}^{(2)} + \mathrm{a}_{2si}^{(2)} \cdot \mathrm{a}_{Rsi}^{(1)}\right), \quad (91)$$

тут $\oplus, \otimes$ – оператори розширеного множення та сумування нечітких чисел відповідно [Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта, с.103].

Як вже зазначалося вище, ваги мають встановлюватися групою висококпрофесійних експертів та інженерів зі знань, а в законодавчому порядку – оформлятися ЦВК, якщо йдеться навіть про вибори районного масштабу.

На третьому, останньому, кроці нечітко-множинного алгоритму здійснюється дефазифікація нечітких оцінок кандидатів із наступним їх нормуванням на одиницю. Існує можливість визначення рейтингу НЧ [38, 39], однак це складніше за порівняння дефазифікованих значень. В цьому дослідженні дефазифікація НЧ виконувалась за методом центра ваги в середовищі *MS Excel.*

Наукові результати, подані у цій статті, отримано при виконанні НДР із реєстраційним номером 0118U006677, 01.01.2019–31.12.2022.

(продовження слідує)

Список використаних джерел

1. Мюллер Д. Общественный выбор III / Пер. с англ. под ред. А. П. Заостровцева, А. С. Скоробогатова. Москва: Гос. ун-т – Высшая школа экономики, Институт «Экономическая школа», 2007. 994 с.
2. Хамханова Д. Н. Теоретические основы обеспечения единства экспертных измерений. Улан-Уде: изд-во ВСГУТУ, 2006. 170 с.
3. Яремчук Н. А., Года О. Ю. Метод оцінювання комплексного показника якості за вербальними одиничними показниками якості з урахуванням вагових коефіцієнтів // Інформаційні системи, механіка та керування. 2015. Вип. 12. С. 5–11.
4. Yager R. R. On ordered weighted averaging aggregation in multicriteria decision making // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 1988. Vol. 18. P. 183–190.
5. Шилин А. И., Коптелова И. А. Теория принятия решений в проектировании информационно-измерительной техники. Волгоград: ВолГУ, 2012. 128 с.
6. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. Пер. с англ. Москва: Наука, 1978. 352 с.
7. Постников В. М., Спиридонов С. Б. Выбор весовых коэффициентов локальных критериев на основе арифметической прогрессии // Наука и образование. 2015. № 9. С. 237–249.
8. Постников В. М., Спиридонов С. Б. Методы выбора весовых коэффициентов локальных критериев // Наука и образование. 2015. № 6. С. 267–287.
9. Некрестьянова Ю. Н. Принцип наименьшего действия как инструмент вычисления оптимальных значений весовых коэффициентов // Международный научный институт «EDUCATIO». 2015. № 4(11). Ч. 1. С. 70–73.

[2] Тут враховано, що кількість поділків лінгвістичних шкал для вимірювання кожної ознаки є однаковою: $K_s = K$.

10. Статистическое измерение качественных характеристик. Пер. с англ. Под ред. Е. М. Четыркина. Москва: Статистика, 1972. 172 с.
11. Саати Т. Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. Пер. с англ. 2-е изд. Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 360 с.
12. Belton V., Gear T. On a Shortcoming of Saaty's Method of Analytical Hierarchies // Omega. 1983. Vol. 11. No 3. P. 228–230.
13. Кушурбаева В. Т., Сушков Ю. А., Тамазян Г. С. Шкалы и способы получения относительных приоритетов в методе анализа иерархий // Вестник СПбГУ. Серия «Математика, механика, астрономия». 2011. Вып. 4. С. 52–60.
14. Худолей Д. М. Парадоксы Кондорсе и их решение // Вестник Пермского университета. Юридические науки. 2017. Вып. 37. С. 288–302.
15. Волошин О. Ф., Мащенко С. Ф. Моделі та методи прийняття рішень. 2-ге вид., перероб. та допов. Київ: Видавничо-поліграфичний центр "Київський університет", 2010. 336 с.
16. Тоценко В. Г. Методи та системи підтримки прийняття рішень. Алгоритмичний аспект. Київ: Наукова думка, 2002. 381 с.
17. Черноруцкий И. Г. Методы принятия решений, Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005, 416 с.
18. Згуровский М. З., Павлов А. А., Штанькевич А. С. Модифицированный метод анализа иерархий // Системні дослідження та інформаційні технології. 2010. № 1. С. 7–25.
19. Панкратова Н. Д., Недашківська Н. І. Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування. Київ: ІВЦ "Вид-во "Політехніка", 2010. 371 с.
20. Павлов О. А., Ліщук К. І. та ін. Модифікований метод аналізу ієрархій (версія 1, 2) // Вісник НТУУ "КПІ". Інформатика, управління та обчислювальна техніка. 2010. № 50. С. 43–54.
21. Миронова Н. А. Интеграция модификаций метода анализа иерархии для систем поддержки принятия групповых решений // Радіоелектроніка, інформатика, управління. 2011. № 2. С. 47–54.
22. Федулов Я. А. Методы и программные средства поддержки выбора решений на основе прямого и обратного нечеткого оценивания: дисс. … канд. техн. наук. Смоленск, 2015. URL: https://www.dissercat.com/content/metody-i-programmnye-sredstva-podderzhki-vybora-reshenii-na-osnove-pryamogo-i-obratnogo-nech
23. Каденко С. В., Циганок В. В. Визначення відносної компетентності експертів під час агрегації парних порівнянь // Реєстрація, зберігання і обробка даних. 2017. Т. 19. № 2. С. 69–83.
24. Недашківська Н. І. Методологія та інструментарій підтримки прийняття рішень на основі ієрархічних та мережевих моделей: дис. … д-ра техн. наук. Київ, 2018. URL: https://scholar.google.com.ua/citations?user =s625ZEAAAAAJ &hl= ru
25. Hwang C. L., Yoon K. Multiple Attribute Decision Making – Methods and Applications. A State of Art Surwey, Berlin, Heidelberg, NY: Springer Verlag, 1981. 320 p.
26. Chang D. Y. Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP // Eur. J. Oper. Res. 1996. 95. No 3. P. 649–655.
27. Панкратова Н. Д., Недашковская Н. И. Гибридный метод многокритериального оценивания альтернатив принятия решений // Кибернетика и системный анализ. 2014. Т. 50. № 5. С. 58–70.
28. Сініцький М. Є. Хмарні технології у фінансово-статистичних розрахунках: навч. посібник. Київ: ДП "Інформ.-аналіт. агентство", 2016. 517 с.
29. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения. Пер. с англ. Москва: Советское радио, 1972, 192 с.
30. Метод Шульце (Wiki). URL: https://uk.wikipedia.org/w/index.php? title= Метод_Шульце&oldid=25981562
31. Набор Шварца (Wiki). URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz_set
32. Тушавин В. А. Медиана Кемени. URL: https://github.com/Tushavin/ RANKING/blob/master/article.md
33. Тушавин В. А. Сравнение подходов к ранжированию. URL: https://github.com/Tushavin/RANKING/blob/master/article3.md

34. Тушавин В. А. Ранжирование показателей качества с использованием методов Кемени – Янга и Шульце // Экономика и менеджмент систем управления. 2015. № 4.4(18). С. 497–503.
35. Полещук О. М. Построение интегральных моделей в рамках нечеткой экспертной информации // Лесной вестник. 2003. № 5. С. 155–159.
36. Полещук О. М. Методы представления экспертной информации в виде совокупности терм-множеств полных ортогональних семантических пространств // Лесной вестник. 2002. № 5. С. 198–216.
37. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. Пер. с англ. 3-е изд. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 801 с.
38. Полещук О. М. Методы предварительной обработки нечеткой экспертной информации на этапе ее формализации // Лесной вестник. 2003. № 5. С. 160–167.
39. Полещук О. М., Полещук И. А. Нечеткая кластеризация элементов множества полных ортогональных семантических пространств // Лесной вестник. 2003. № 1. С. 117–127.

References

1. Mueller D. (2007). *Obshchestvennyy vybor III [Public Choice III]*. Trans. from English. Moscow: National Research University Higher School of Economics, Institute “Economic School” [in Russian].
2. Khamkhanova D. N. (2006). *Teoreticheskie osnovyi obespecheniya edinstva ekspertnyih izmereniy [Theoretical foundations of the integrity of expert measurements]*. Ulan-Ude: East Siberian University of Technologies and Management [in Russian].
3. Yaremchuk N. A., & Hoda O. Yu. (2015). Metod otsiniuvannia kompleksnoho pokaznyka yakosti za verbalnymy odynychnymy pokaznykamy yakosti z urakhuvanniam vahovykh koefitsiientiv [A method for assessment of a complex quality indicator by verbal single quality indicators based on weight coefficients]. *Informatsiini systemy, mekhanika ta keruvannia – Information Systems*, *Mechanics and Control*, 12, 5–11 [in Ukrainian].
4. Yager R. R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 18, 183–190.
5. Shylin A. I., & Koptelova I.A. (2012). *Teoriya prinyatiya resheniy v proektirovanii informatsionno-izmeritelnoy tehniki [The decision-making theory in designing information and measurement devices]*. Volgograd: Volga State University [in Russian].
6. Fishburn P. C. (1978). *Teoriya poleznosti dlya prinyatiya resheniy [Utility Theory for Decision Making]*. Trans. from English. Moscow: Nauka [in Russian].
7. Postnikov V. M., & Spiridonov S. B. (2015). Vyibor vesovyih koeffitsientov lokalnyih kriteriev na osnove arifmeticheskoy progressii [Choosing weight coefficients of local criteria on the basis of arithmetic progression]. *Nauka i obrazovaniye – Science and Education*, 9, 237–249 [in Russian].
8. Postnikov V. M., & Spiridonov S. B. (2015). Metodyi vyibora vesovyih koeffitsientov lokalnyih kriteriev [Methods of choosing weight coefficients of local criteria]. *Nauka i obrazovaniye – Science and Education*, 6, 267–287 [in Russian].
9. Nekrestianova U. N. (2015). Printsip naimenshego deystviya kak instrument vyichisleniya optimalnyih znacheniy vesovyih koeffitsientov [The principle of least action as a tool for calculating optimal values of weight]. *Mezhdunarodnyiy nauchnyiy institut EDUCATIO” – International Scientific Institute “EDUCATIO”*, 4(11), part 1, 70–73 [in Russian].
10. (1972). Statisticheskoe izmerenie kachestvennyih harakteristik [Guidelines for measuring statistical quality]. Trans. from English. Moscow: Statistika [in Russian.
11. Saaty T. L. (2009). *Prinyatie resheniy pri zavisimostyah i obratnyih svyazyah: Analiticheskie seti [Decision Making with Dependence and Feedback: The Analytical Network Process]*. Trans. from English. 2nd ed. Moscow: Book house “LIBROKOM” [in Russian].
12. Belton V., & Gear T. (1983). On a Shortcoming of Saaty’s Method of Analytical Hierarchies. *Omega*, vol. 11, issue 3, 228–230.
13. Kushurbaeva V. T., Sushkov Yu. A., & Tamazyan H. S. (2011). Shkalyi i sposobyi polucheniya otnositelnyih prioritetov v metode analiza ierarhiy [Scales and ways for

deriving relative priorities in the method of analysis of hierarchies]. *Vestnik SPbGU. Seriya "Matematika, mekhanika, astronomiya" – Bulletin of Saint-Petersburg State University. Series "Mathematics, Mechanics, Astronomy"*, 4, 52–60 [in Russian].
14. Khudoley D. M. (2017). Paradoksyi Kondorse i ih reshenie [The Condorcet Paradoxes and Their Solution]. *Vestnik Permskogo universiteta. Yuridicheskiey nauki – Bulletin of Perm University. Legal Sciences*, 37, 288–302 [in Russian].
15. Voloshyn O. F., & Mashchenko S. F. (2010). *Modeli ta metody pryinyattia rishen [Models and methods of decision-making]*. 2nd ed., revised and suppl. Kyiv: Printing and publishing center "Kyivskyi universytet" [in Ukrainian].
16. Totsenko V. H. (2002). *Metody ta systemy pidtrymky pryinyattia rishen. Alhorytmichnyi aspect [Methods and systems for decision-making support]*. Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
17. Chernorutskiy I. H. (2005). *Metodyi prinyatiya resheniy [Methods of decision-making]*. Saint-Petersburg: BKHV-Petersburg [in Russian].
18. Zgurovskiy M. Z., Pavlov A. A., & Shtankevich A. S. (2010). Modifitsirovannyiy metod analiza ierarhiy. *Systemni doslidzhennia ta informatsiini tekhnolohii – System Studies and Information Technologies*, 1, 7–25 [in Russian].
19. Pankratova N. D., & Nedashkivska N. I. (2010). *Modeli i metody analizu iierarkhii: Teoria. Zastosuvannia [Models and methods for analysis of hierarchies: Theory. Applications]*. Kyiv: Information and computing center "Politekhnika" [in Ukrainian].
20. Pavlov O. A., Lishchuk K. I. et al. (2010). Modyfikovanyi metod analizu iierarkhii (versiia 1,2) [A modified method for analysis of hierarchy (version 1,2)]. *Visnyk NTUU "KPI". Informatyka, upravlinnia ta obchysliuvalna tekhnika – Bulleting of National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute". Informatics, Management and Computing Devices*, 50, 43–54 [in Ukrainian].
21. Mironova N. A. (2011). Integratsiya modifikatsiy metoda analiza ierarhii dlya sistem podderzhki prinyatiya gruppovyih resheniy [Integration modifications of the analytical hierarchy process for group decision making support systems]. *Radioelektronika, informatyka, upravlinnya – Radio Electronics, Computer Science, Control*, 2, 47–54 [in Russian].
22. Fedulov Ya. A. (2015). Metodyi i programmnyie sredstva podderzhki vyibora resheniy na osnove pryamogo i obratnogo nechetkogo otsenivaniya [Methods and software tools to support the choice of decisions on the basis of direct and reverse fussy evaluation]. Smolensk. Retrieved from https://www.dissercat.com/content/metody-i-programmnye-sredstva-podderzhki-vybora-reshenii-na-osnove-pryamogo-i-obratnogo-nech [in Russian].
23. Kadenko S. V., & Tsyhanok V. V. (2017). Vyznachennia vidnosnoi kompetentnosti ekspertiv pid chas ahrehatsii parnykh porivnian [Determining the relative competency of experts in time of aggregating paired comparisons]. *Reiestratsiia, zberihannia i obrobka danykh – Registration, Storage and Processing of Data*, vol. 19, issue 2, 69–83 [in Ukrainian].
24. Nedashkivska N. I. (2018). Metodolohiia ta instrumentarii pidtrymky pryiniattia rishen na osnovi iie-rarkhichnykh ta merezhevykh modelei [Methodology and tools for decision-making support on the basis of hierarchical and network models]. Doctor thesis. Retrieved from https://scholar.google.com.ua/citations?User=s625ZEAAAAAJ& hl = ru [in Russian].
25. Hwang C. L., & Yoon K. (1981). *Multiple Attribute Decision Making – Methods and Applications*. A State of Art Surwey, Berlin, Heidelberg, NY: Springer Ver-lag.
26. Chang D. Y. (1996). Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP. *Eur. J. Oper. Res.*, 95, issue 3, 649–655.
27. Pankratova N. D., & Nedashkovskaya N. I. (2014). Gibridnyiy metod mnogokriterialnogo otsenivaniya alternativ prinyatiya resheniy [The hybrid method for multi-criterial assessment of decision-making alternatives]. *Kibernetika i sistemnyi analiz – Cybernetics and System Analysis*, vol. 50, issue 5, 58–70 [in Russian].
28. Sinttskyi M. Ye. (2016). *Khmarni tekhnolohii u finansovo-statystychnykh rozrakhunkakh [Cloud technologies in financial-statistical computations]*. Kyiv: Information and Analytical Agency [in Ukrainian].

29. Kemeni J., Snell J. (1972). *Kiberneticheskoe modelirovanie. Nekotoryie prilozheniya [Cybernetic Modelling. Some Applications]*. Trans. from English. Moscow: Sovetskoye radio [in Russian].
30. Schulze method (Wiki). URL: https://uk.wikipedia.org/w/index.php? title = Metod_ Shul'tse & oldid = 25981562 [in Ukrainian].
31. Schwarz set (Wiki). URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Schwartz_set
32. Tushavin V. A. Mediana Kemeni [Kemeni Median]. Retrieved from https://github.com/ Tushavin/ RANKING / blob / master / article.md [in Russian].
34. Tushavin V. A. (2015). Ranzhirovanie pokazateley kachestva s ispolzovaniem metodov Kemeni – Yanga i Shultse [Ranking of quality indicators by methods of Schulze and Kemeni – Yang]. *Ekonomika i menedzhment sistem upravleniya – Economics and Management of Control Systems*, 4.4(18), 497–503.
35. Poleshchuk O. M. (2003). Postroenie integralnyih modeley v ramkah nechetkoy ekspertnoy informatsii [Constructing integral models with fussy expert information]. *Lesnoy vestnik – Forestry bulletin*, 5, 155–159 [in Russian].
36. Poleshchuk O. M. (2002). Metody predstavleniya ekspertnoy informatsii v vide sovokupnosti term-mnozhestv polnykh ortogonalnykh semanticheskikh prostranstv [Methods for expert data presentation in form of term-sets of the full orthogonal semantic spaces]. *Lesnoy vestnik – Forestry bulletin*, 5, 198–216 [in Russian]
37. Piegat A. (2015). *Nechetkoe modelirovanie i upravlenie [Fuzzy Modelling and Control]*. Trans. from English. 3rd ed. Moscow: BINOM. Laboratory of knowledge [in Russian].
38. Poleshchuk O. M. (2003). Metodyi predvaritelnoy obrabotki nechetkoy ekspertnoy informatsii na etape ee formalizatsii [Methods of preliminary processing of fuzzy expert information at the phase of its formalization]. *Lesnoy vestnik – Forestry bulletin*, 5, 160–167 [in Russian].
39. Poleshchuk O. M., & Poleshchuk I. A. (2003). Nechetkaya klasterizatsiya elementov mnozhestva polnyih ortogonalnyih semanticheskih prostranstv [Fussy clustering of the elements in a set of full orthogonal semantic spaces]. *Lesnoy vestnik – Forestry bulletin*, 1, 117–127 [in Russian].

Посилання на статтю:

Сініцький М. Є. Виборчі системи у цифрову епоху: базові проблеми та нові можливості. Частина III. Методи багатокритеріальних підходів для виборчих технологій. *Науковий вісник Національної академії статистики, обліку та аудиту: зб. наук. пр.* 2021. №3-4. С.109-124. doi: 10.31767/nasoa.3-4-2021.12.