

УДК: 342.8+519.816  
JEL Classification: F 47  
doi: 10.31767/nasoa.1-2-2021.10

**М. Є. СІНИЦЬКИЙ,**

кандидат фізико-математичних наук, доцент,  
доцент кафедри економіко-математичних дисциплін  
та інформаційних технологій,  
Національна академія статистики, обліку та аудиту;  
e-mail: rapathryl@gmail.com,  
ORCID: 0000-0002-2954-615X

## **Виборчі системи у цифрову епоху: базові проблеми та нові можливості.**

### **Частина II. Побудова шкал і підходи до визначення інтегрального рейтингу**

У частині I з теоретичних позицій розглянуто причини необхідності реформування виборчого процесу в Україні. Сформульовано мету та задачі дослідження. Проаналізовано класичні математичні моделі виборчих технологій, обрані для порівняння, із сучасними підходами.

Частина II містить аналіз принципів вибору методик вимірювання результатів схвального голосування. Розглянуто питання визначення вербально-числової шкали, оцінювання узгодженості індивідуальних рішень, що приймаються виборцями, та застосування статистичних критеріїв для отримання консолідованого результату.

У частині III розглянуто моделі, обрані для розрахунків підсумкового виборчого рейтингу. Наведено математичні алгоритми багатокритеріального вибору на основі кваліметричного підходу та парних порівнянь за чотирьома варіантами шкал. Описано протоколи визначення консенсусних альтернатив з використанням методу Topsis, медіани Кемені – Янга, евристичної процедури Шульце та нечітко-множинного підходу.

Остання, IV частина містить результати апробації обраних протоколів системи схвального голосування для моделі виборів з 4 кандидатів за 7 питаннями виборчого бюлетеня. Наведено алгоритм і результати генерації за методом Монте-Карло масивів вихідних даних розміром 10000 записів, які мають рівномірний та нормальний розподіли з трьома варіантами параметру зміщення. Для виявлення чутливості досліджуваних протоколів до порушень транзитивності профілів індивідуальних переваг здійснено трансформацію первинних масивів даних шляхом заміни нетранзитивних профілів на еквівалентну кількість транзитивних без надання переваги будь-якій альтернативі.

На основі оцінки кореляції підсумкових рейтингів, їх чутливості до типу розподілу і до порушень транзитивності індивідуальних суджень зроблено висновок про доцільність використання медіани Кемені для визначення підсумків голосування. Застосування запропонованого методу трансформації первинних даних також уможливує використання протоколів Кондорсе, Доджсона, Саати та Шульце.

Результати дослідження свідчать про існування принципової можливості переходу до нової цифрової парадигми виборчого процесу, основаної на схвальному принципі голосування.

**Ключові слова:** суспільний вибір, схвальне голосування, класичні виборчі технології, узгодженість думок виборців, нечислова статистика, порядкові шкали, арифметизація шкал, узгодженість профілів, коефіцієнт Кендала, лінійна згортка, ваги критеріїв, нелінійне шкалювання, індекси узгодженості, вербально-кількісні шкали, кваліметрія, парні порівняння, медіана Кемені, евристика Шульце, нечіткі множини, метод Монте-Карло, профілі голосування, транзитивність, p-value.

## **Electoral Systems in the Digital Age: Underlying Challenges and New Opportunities. Part II. Constructing the Scales and Algorithms to Determine Integral Rating**

*The article is devoted to the problem of democratic development of Ukraine.*

*The reasons for the need for a radical transformation of the electoral process in Ukraine have been considered from a theoretical standpoint. The main goal and sub-goals of the research have been formulated. The classical mathematical models of electoral technologies, selected for comparison with modern approaches have been described.*

*The basic principles of selection of methods for measuring the results of approval voting have been analyzed. The issues of constructing a verbal-numerical scale, assessing the consistency of voter decisions and applying statistical criteria to obtain a consolidated result have been considered.*

*The models selected for calculating the final election rating are analyzed. Mathematical algorithms of multicriteria selection based on the qualimetric approach and pairwise comparison on four variants of scales are given. Protocols for determining consensus alternatives using the Topsis method, the Kemeni – Young median, the Schulze heuristic procedure, and the fuzzy set approach are described.*

*The results of approbation of the selected protocols of approval of the voting system for the election model of 4 candidates on 7 questions of the ballot paper are given. The algorithm and the results of generating by the Monte Carlo method arrays of initial data with a size of 10,000 records, having a uniform and normal distribution with three variants of the bias parameter, are presented. To identify the sensitivity of the studied protocols to violations of the transitivity of individual preference profiles, the primary data arrays were transformed by replacing the nontransitive profiles with an equivalent number of transitive ones without presenting a preference to any alternative. Based on the assessment of the correlation of the final ratings, their sensitivity to the type of distribution and to violations of the transitivity of individual judgments, it was concluded that it is advisable to use the Kemeny median to determine the voting results. The use of the proposed method for transforming primary data also makes it possible to use the Condorcet, Dodgson, Saati and Schulze protocols. The results of this study indicate that there is a fundamental possibility of transition to a new digital paradigm of the electoral process based on the approving principle of voting.*

**Keywords:** *public choice, positive voting, classical election technologies, coherence of voters' opinions, non-numerical statistics, ordinal scales, scale arithmetic, profile consistency, Kendall coefficient, linear convolution, criterion weights, nonlinear scaling, consistency indices, verbal-quantitative scales, qualimetry, pairwise comparisons, Kemeni median, Schulze heuristics, fuzzy sets, Monte Carlo method, voting profiles, transitivity, data consistency, p-value.*

**Питання вибору шкали.** Вимірювальна шкала визначає тип отримуваних даних, допустиму множину операцій над ними та методи інтерпретації результатів [1–11].

Відповіді виборців зазвичай вимірюють у порядковій (ранговій, ординальній) шкалі. Вона будується на основі номінальної шкали шляхом надання їй поділкам (точкам) псевдо-кількісних позначень. Це дозволяє застосовувати до даних процедури нечислової статистики [4]: групування, методи частотного (гістограмного, крос-табличного та “спектрального” [12]) аналізу, обчислення медіанних значень, кореляцій рангів, кластеризованого ранжирування [13]. Однак у порядковій шкалі не можна вимірювати домінування визначених класів (наприклад, наскільки більше або менше виражена певна властивість у порівнюваних об’єктах, і тим паче – у скільки разів більше або менше вона виражена).

Згідно з [3, 4], найкращою шкалою для вимірювання об’єктів нечислової природи

є номінальна дихотомічна шкала від 0 до 1, яка використовується для кодування бінарних (“опозиційних”) відповідей (“так-ні”, “краще-гірше” тощо). На думку багатьох дослідників, дихотомічні дані є стабільнішими за результати, отримані у шкалах з великим числом градацій.

Виходячи з цього для якісного розрізнення думок виборців існують два шляхи: або дробити питання (критерії), спрощуючи їх і представляючи у вигляді ієрархічної структури так, щоб можна було використовувати бінарний вибір, або застосовувати багатоподількове шкалювання, причому в разі різнорідних критеріїв – за різними шкалами. Якщо різнорідні критерії об’єднуються, тоді комплексний критерій повинен мати власну шкалу, побудовану з комбінацій градацій первинних шкал<sup>1</sup>. На жаль, перший варіант не придатний для більшості масових виборчих технологій, тому залишається шкалювання з деякою кількістю градацій відповідей.

Кожна з вимірюваних шкал має бути адекватною природним властивостям прояву оцінюваної ознаки. Інтенсивні величини вимірюють у порядкових (ординальних) шкалах. Для них встановлюють відношення еквівалентності та порядку (за збільшенням чи зменшенням кількісної прояви властивості) й описують монотонно зростаючими чи спадними функціями, і для них дозволені перетворення з використанням функцій тільки такого типу. Тобто значення ознаки (властивості) об’єктів, що виміряна у порядковій шкалі, можна довільно змінювати, аби не порушувалось (було стійким) первинно встановлене ранжирування цих об’єктів за даною властивістю. Це дозволяє перевірити допустимість математичних операцій у порядковій шкалі.

Для роботи з екстенсивними величинами використовуються шкали інтервалів. На відміну від порядкових, вони повинні мати рівні поділки, що забезпечує можливість кількісних порівнянь (наприклад, обчислювання різниць). Ці шкали допускають зміну масштабу та зсув початку відліку (лінійні перетворення). Згідно з [15], в інтервальних шкалах можна виконувати алгебраїчні та логічні операції і майже всі статистичні обчислення.

Для переходу від порядкової шкали до інтервальної шкали (“арифметизації” за термінологією [2, 16]) поділкам (точкам) шкали замість абстрактних чисел присвоюють певні бали. Критерієм правильності служить виконання вимоги щодо незмінності відносних різниць між поділками при лінійному перетворенні шкали [3].

В літературі розглядають два види арифметизації: стохастичну, коли апріорна інформація щодо вимірюваної величини відсутня, і з урахуванням апріорної інформації щодо локалізації градацій ординальної шкали на числовій осі (наприклад, за висновками експертів). У [17] показано, як зі збільшенням кількості поділок вербальної шкали за стохастичної арифметизації збільшується невизначеність і похибка встановлення відповідної інтервальної шкали (арифметизованої порядкової шкали).

Існує думка, що арифметизація є коректною операцією переважно для лінгвістичних шкал (квазіпорядку) і представляє перехід до нечіткої шкали квазіпорядку [18, 19].

В нашому дослідженні за базову (єдину для всіх критеріїв) було обрано лінгвістичну (вербальну) п’ятирівневу шкалу. Її значеннями<sup>2</sup> є слова, що виражають оцінку виборцем ступеня прояву у кандидата певної властивості, обраної за критерій, а саме: “низький”, “нижче середнього”, “середній”, “вище середнього”, “високий”. П’ять категорій обрано тому, що така їх кількість вважається верхньою межею диференціації у психологічних дослідженнях і часто використовується у соціологічних опитуваннях [10, 20]. Обираючи ту чи іншу категорію, виборець погоджується з її вмістом. П’ять поділок шкали можуть і не бути оптимальним числом, тому вважатимемо такий поділ першим наближенням [17].

П’ятирівневій лінгвістичній шкалі ставимо у відповідність гібридну вербально-числову шкалу від 1 до 5 з ціною поділку в один бал, тобто “висока” оцінка рівня прояву визначеної властивості претендента отримує у п’ятеро більше балів, ніж “низька” оцінка.

Порядкова шкала зазвичай є нелінійною, бо вміст питання від початку впливає на ставлення респондента до питання, а відтак і на градації шкали. Наприклад, чим багатшою є людина, тим менше вона розрізняє невеликі фінансові здобутки, тобто

---

1 Існує комбінований підхід [14].

2 Синоніми: поділками, рівнями, класами еквівалентності, градаціями, категоріями, варіантами, термами.

для неї мітки на початку фінансової шкали будуть щільнішими, оскільки вони є менш значимими (мають меншу “вагу”), ніж з боку великих сум. Ще складнішою є ситуація з отриманням комплексних оцінок. Потрібно забезпечити не тільки приблизно однакову ціну поділівків шкали, призначеної для вимірювання відповіді на конкретне питання, а й мінімальні зміни відношень між ними при переході від питання до питання.

Лінеаризувати шкалу можна різними шляхами. Наприклад, з використанням лінійної регресії результату на образ незалежної змінної [8]:

$$f(y) = b_0 + b_1 \cdot \varphi(x), \quad (13)$$

де  $\varphi(x)$  – результат заміни первинної змінної, тобто значення функції, що апроксимує первинну шкалу;  $f(y)$  і  $\varphi(x)$  – строго монотонні функції.

В нашій задачі потреба в лінеаризації може виникнути, якщо не вистачатиме роздільної здатності первинної шкали.

Серед найбільш використовуваних вербально-числових шкал варто відмітити так звані шкали бажаності: Харінгтона [21], Гібба [22] та Дерінгера і С’юча [23]. Вони можуть стати в нагоді для агрегації різнорідних критеріальних показників в один “синтетичний” критерій (показник).

В разі необхідності вимірювання співвідношень між проявами певної властивості переходять до шкали відношень. Вона відрізняється від інтервальної шкали неможливістю зсуву початку відліку, тобто нульова точка на шкалі є фіксованою.

**Питання узгодженості рейтингів.** Логіка підказує, що за наявності консолідованої думки ранжирування претендентів (“профілі”), визначені за результатами волевиявлення кожного виборця, мають бути схожими один на одного (узгодженими). Якщо це так, то для отримання консолідованого ранжирування можна використати медіану, середнє геометричне чи середнє арифметичне в залежності від обраної шкали вимірювання. Інакше, як багато хто вважає, для отримання узагальненого ранжирування слід виділяти кластери думок, обробляти їх окремо, а потім якимось чином об’єднувати.

В останні роки значення критерію (індексу) узгодження індивідуальних ранжирувань (міжрейтингової угоди – *Inter-Rater Agreement Indice*) як правило визначають відстанню (у певній метриці) виставленого рейтингового балу від деякої центральної тенденції, наприклад медіани або середнього геометричного чи арифметичного. Початок було покладено М. Кендалом і Б. Смітом [24], які запропонували оцінювати узгодженість ранжирувань шляхом розрахунку коефіцієнта множинної рангової кореляції (або коефіцієнта конкордації Кендала). Для цього будується матриця рангів, рядки якої відповідають підставі ранжирування (в нашій задачі – виборцям, які оцінюють ступінь прояву певної властивості у кандидата), а стовпці – об’єктам ранжирування (в нашій задачі – “кандидатам”).

З урахуванням можливості нестроного ранжирування, тобто пов’язаності рангів (наявності однакових рангів у різних об’єктів, що свідчить про невизначеність думок виборця і породжує зв’язки змінних), розрахункова формула для коефіцієнта конкордації Кендала має вигляд:

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12} \cdot N^2 (M^3 - M) - N \sum_{i=1}^N T_i}, \quad (14)$$

де –  $N$  кількість виборців (число порівнюваних ранжирувань);  $M$  – кількість об’єктів (довжина ранжирування);  $S$  – сума квадратів відхилень суми індивідуальних рангів від середнього рангу;  $T_i$  – поправочний коефіцієнт для  $i$ -го виборця;

$$S = \sum_{j=1}^M (\sum_{i=1}^N r_{ij} - \bar{R})^2, \quad (15)$$

тут  $r_{ij}$  – ранг, визначений  $i$ -м виборцем  $j$ -му об’єкту;  $\bar{R}$  – середній ранг за усіма об’єктами:

$$\bar{R} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N r_{ij} = \frac{1}{2} N \cdot (M + 1), \quad (16)$$

$$T_i = \frac{1}{12} \sum_{l=1}^{L_i} (h_{li}^3 - h_{li}), \quad (17)$$

де  $h_{li}$  – число нерозрізнених рангів (зв’язків)  $l$ -го рівня у  $i$ -го виборця;

$L_i$  – загальне число співпадаючих рангів (зв’язків) у  $i$ -го виборця.

Чим ближчий  $W$  до одиниці, тим більше збігаються думки виборців і тим ближче закон розподілу цих думок до рівномірного.

Узгодженість рангів (нульова гіпотеза) вважається доведеною, якщо коефіцієнт конкордації Кендала є статистично значимим, що перевіряється з використанням критерію  $\chi^2$ -Пірсона. Коли розрахункове значення  $\chi^2$  перевищує критичне для заданого числа степенів свободи  $M - 1$  та рівня статистичної значимості  $\alpha$ , величина  $W$  вважається невідповідною і гіпотеза щодо узгодженості рангів приймається, і навпаки:

$$\chi^2 = \frac{S}{\frac{1}{12} \cdot N \cdot M \cdot (M+1) - \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^N T_i} = W(M-1)N \geq \chi_{(M-1, \alpha)}^2, \quad (18)$$

Іншим доказом, застосовуваним здебільшого у західній статистиці, є розрахунок імовірності відмови від нульової гіпотези ( $p$ -значення). В *MS Excel* для цього існує функція *XI2.OBP.PIX*, а в *R* – *qchisq()*. Якщо  $p$ -значення перевищує заданий рівень значимості  $\alpha$  (зазвичай  $\alpha = 0,05$ ), для відхилення нульової гіпотези немає достатніх підстав.

Описана вище методика піддавалась критиці [4], але, незважаючи на це, її продовжують рекомендувати як первинний інструмент аналізу узгодженості як нечислових даних [25], так і числових [26].

**Проблема багатомірності.** Наведений у частині I статті опис класичних методів виявлення результатів виборчих компаній можна вважати однокритеріальною схемою вибору, коли людина голосує, оцінюючи кандидата начебто за деяким власним комплексним критерієм. З теорії вимірювання [1, с. 39; 16] відомо, що для отримання однозначного результату (в нашому випадку – строгого рейтингу кандидатів) потрібно збільшувати кількість питань, тобто виконувати вимірювання за декількома критеріями у шкалах лінійного порядку. Саме на основі цієї ідеї діють організатори експертиз, квалітологи, психологи, соціологи й тестологи. А чи можна домогтися результату в такий спосіб при широкомасштабних голосуваннях? Адже наявність декількох критеріїв (питань виборчого бюлетеню) переводить проблему у клас значно складніших багатокритеріальних задач.

На сьогодні розроблено багато алгоритмів знаходження оптимального розв'язку багатокритеріальних задач оптимізації, в принципі придатних для об'єднання індивідуальних рейтингів, побудованих за результатами голосування кожного виборця, в єдиний інтегральний рейтинг. Нижче наведено ті з них, які ми змогли випробувати, враховуючи наші обмежені обчислювальні ресурси.

**Алгоритм лінійної згортки.** Йдеться про зважене сумування рейтингових місць або набраних кандидатами балів із питань виборчого бюлетеню. Тут ключовим є визначення ваг критеріїв. Експертні технології, де кількість оцінювачів обмежена, передусім ґрунтуються на суб'єктивних уявленнях, причому часто зважування критеріїв доповнюються використанням нелінійних шкал. Наприклад, ваги критеріїв визначаються за шкалою спадаючої арифметичної або геометричної прогресії з різними значеннями відношення максимальної до мінімальної ваги ( $\gamma$ ). Детальніше це питання розглядається нижче в огляді методів парного порівняння.

Більш об'єктивними вважаються методи зважування, побудовані на визначенні “відстані” від центральної тенденції в певній метриці. В цьому плані виборчі технології мають переваги, оскільки оперують зі статистиками “великих груп”, або “big data”, тобто надійність висновків для них суттєво підвищується.

Статистичні критерії. Тут насамперед йдеться про застосування коефіцієнта Кендала. В нашій роботі цей показник використовується як для визначення узгодженості індивідуальних профілів виборців за кожним критерієм оцінювання, так і для оцінювання якості інтегральної упорядкованості за різними критеріями (узагальненого профілю).

Крім того, в припущенні щодо можливості застосування кількісних шкал для визначення узагальненого профілю в якості критеріїв було використано:

- $E$  – середній рейтинговий бал
- 

$$E = \sum_{i \in I} i \cdot v_i / N, \quad (19)$$

де тут  $i$  нижче:  $v_i$  – кількість оцінювачів, які виставили  $i$ -й рейтинговий бал,  $v_i > 0$ , якщо  $i \in I$ ;  $\{x_1, \dots, x_k\}$  – список виставлених рейтингових балів;  $I = \{1, \dots, i, \dots, k\}$  – нумерація виставлених рейтингових місць;  $N$  – кількість оцінювачів;

- стандартне відхилення

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i \in I} v_i (x_i - E)^2}{N-1}}; \quad (20)$$

- коефіцієнт варіації

$$CV = S/E; \quad (21)$$

- показник середнього відхилення  $AD_\mu$

$$AD_\mu = \frac{\sum_{i \in I} v_i |x_i - \mu|}{N}, \quad (22)$$

де  $\mu$  – медіана або середнє арифметичне;

- відкорегований середній показник відхилення  $AD_{adj}$

$$AD_{adj} = \frac{2N-1}{2(N-1)} AD_\mu; \quad (23)$$

- $r_{WG}$ -індекс

$$r_{WG} = 1 - \frac{S^2}{\sigma_{EU}^2}, \quad (24)$$

де

$$\sigma_{EU}^2 = (N^2 - 1)/12 \quad (25)$$

якщо  $S^2 > \sigma_{EU}^2$  приймається  $r_{WG} = 0$ ;

- відкорегований  $r_{WG}$ -індекс

$$\tilde{r}_{WG} = 1 - \frac{S^2}{\sigma_{MV}^2}, \quad (26)$$

тут  $\sigma_{MV}^2 = 0,5(M^2 + 1) - 0,25(M + 1)^2$ , (27)

$M$  – кількість поділів шкали;

- $a_{WG}$ -індекс

$$a_{WG} = 1 - \frac{2(N-1)S^2}{N(x_1 + x_k)E - E^2 - x_1 \cdot x_k}; \quad (28)$$

- зважений парний індекс  $MR$

$$MR = \frac{\sum_{i \in I} v_i v_l (1 - \frac{|x_i - x_l|}{M} - \sum_{i \in I} v_i)}{N}; \quad (29)$$

- критерій Пірсона

$$\chi^2 = M/N \sum_{j=1}^M (v_j - \frac{N}{M})^2 \quad (30)$$

Як приклад типового статистичного підходу можна навести відомий метод ELEKTRA [27], де одним із варіантів визначення ваги критерію ( $w_s$ ) для нормального закону розподілу результатів є:

$$w_s = T(1 - p_{\bar{x}_s}), \quad (31)$$

тут  $P_{\bar{x}}$  – ймовірність середнього значення величини  $X_s$  (відносна частота, що відповідає максимуму на гістограмі спостережень оцінок за критерієм  $X_s$ );  $T$  – кількість критеріїв оцінювання.

З (31) слідує, що чим менша дисперсія думок виборців (більший їх збіг), тим меншою має бути вага відповідного критерію. Тобто чим більша різниця в оцінках, тим більш важливим вважається критерій. На основі цієї ідеї, подібно до [28], нами було опробовано наведений нижче алгоритм обчислення ваг критеріїв:

- розрахунок середніх оцінок за кожним  $s$ -м критерієм

$$\bar{a}_s = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \tilde{a}_{sj}, \quad (32)$$

тут  $M$  – кількість альтернатив (кандидатів);  $\tilde{a}_{sj}$  – деяка усереднена за  $N$  виборцями

(наприклад, медіанна), нормована на максимальне значення оцінка  $j$ -ї альтернативи (кандидата) за  $s$ -м критерієм:

$$\tilde{a}_{sj} = \frac{a_{sj}}{\max_{j=1, N} \{a_{sj}\}}, \quad (33)$$

- знаходження розкиду за кожним критерієм:

$$R_s = \frac{1}{M \cdot \bar{a}_s} \sum_{j=1}^M |\tilde{a}_{sj} - \bar{a}_s|, \quad (34)$$

- обчислення нормованих ваг критеріїв:

$$w_s = \frac{R_s}{\sum_{s=1}^T R_s}, \quad (35)$$

Крім того, нами було використано спосіб зважування на основі коефіцієнтів кореляції [29]:

$$w_s = \frac{|r_{\bar{a}_j \tilde{a}_{sj}}|}{\sum_{s=1}^T |r_{\bar{a}_j \tilde{a}_{sj}}|}, \quad (36)$$

де  $r_{\bar{a}_j \tilde{a}_{sj}}$  – коефіцієнт парної кореляції показників  $\bar{a}_j$  і  $\tilde{a}_{sj}$  (33);

$\bar{a}_j$  –  $j$ -та реалізація деякого агрегуючого показника (наприклад,  $\frac{1}{T} \sum_{s=1}^T \tilde{a}_{sj}$ ).

У більшості методів аналіз узгодженості рішень оцінювачів будується на дослідженні частотного розподілу рейтингових балів (категоризованих даних) [12]. В [30] показано, що індекси згоди, побудовані на статистиках (19)–(30), залежать від форми цього розподілу, і запропоновано новий індекс, який враховує інформаційні відмінності, а саме: ентропію Шенона незгоди у розподілі рейтингових балів ( $H(P)$ ) і ентропію випадковості розподілу частот цих балів ( $H(Q)$ ):

$$H(P) = -\sum_{j=1}^k (p_j \cdot \ln p_j), \quad (37)$$

де  $P = \{p_1, \dots, p_l, \dots, p_k\}$  – набір нормалізованих відстаней між послідовністю виставлених рейтингових балів;

$$p_l = d/d, l = 1, \dots, k, \quad (38)$$

$$d_j = x_{j+1} - x_j, j = 1, \dots, k-1 \quad (39)$$

$$d_k = \begin{cases} (m - x_k) + (x_1 - 1) + \frac{m-1}{k-1}, & \text{якщо } k > 1, \\ m, & \text{якщо } k = 1; \end{cases} \quad (40)$$

$$d = \begin{cases} m - 1 + \frac{m-1}{k-1}, & \text{якщо } k > 1, \\ m, & \text{якщо } k = 1; \end{cases} \quad (41)$$

$$H(Q) = -\sum_{i \in I} (q_i \cdot \ln q_i), \quad (42)$$

де  $Q = \{q_i, i \in I\}$  – множина відносних частот вибору  $i$ -го рейтингового балу,

$$q_i = \frac{v_i}{\sum_{i \in I} v_i}, \quad (43)$$

Значення індексу розраховується як:

$$k(P, Q) = 1 - \frac{\bar{H}(P) + \bar{H}(Q)}{2}, \quad (44)$$

де  $\tilde{H}(P)$  і  $\tilde{H}(Q)$  – нормовані на одиницю ентропії

$$\tilde{H}(P) = \begin{cases} \frac{H(P) - \min_p H(P)}{\max_p H(P) - \min_p H(P)}, & \text{якщо } k < m, \\ 1, & \text{якщо } k = m; \end{cases} \quad (45)$$

$$\tilde{H}(Q) = \frac{H(Q)}{\max_{k,Q} H(Q)}, \quad (46)$$

тут  $\min$  і  $\max$  відповідають екстремальним значенням.

Автори [30] на основі даних, отриманих методом Монте-Карло, дійшли висновку, що статистика Пірсона (30) погано працює для неоднорідних розподілів, індекси (19), (21), (23), (24), (28), (29) не показують повну незгоду у разі рівномірного розподілу оцінок за об'єктами і не можуть розрізнити розподіли з рівновіддаленими рівними частотами (таку ж властивість проявляє й критерій (28)). Водночас подвійний ентропійний індекс позбавлений цих недоліків, але його чутливість суттєво знижується зі збільшенням числа оцінювачів ( $N$ ) і числа поділів шкали ( $M$ ). Для розподілів, зміщених у бік великих оцінок, автори пропонують зважений подвійний ентропійний індекс

$$\tilde{k}(P, Q) = 1 - \frac{M-k}{M} \tilde{H}(P) + \frac{k}{M} \tilde{H}(Q). \quad (47)$$

(продовження слідує)

#### Список використаних джерел

1. Литвак Б. Г. Экспертная информация: Методы получения и анализа. Москва: Радио и связь, 1982. 184 с.
2. Мюллер Д. Общественный выбор III. Пер. с англ. под ред. А. П. Заостровцева, А. С. Скоробогатова. Москва: Гос. ун-т – Высшая школа экономики, Институт «Экономическая школа», 2007. 994 с.
3. Литвак Б. Г. О выборе делений шкалы // Статистические методы анализа экспертных оценок. Ученые записки по статистике. 1977. Т. 29. С. 228–234.
4. Орлов А. И. Организационно-экономическое моделирование: теория принятия решений. Москва: КНОРУС, 2010. 568 с.
5. Полещук О. М. Методы представления экспертной информации в виде совокупности терм-множеств полных ортогональных семантических пространств // Лесной вестник. 2002. № 5. С. 198–216.
6. Орлов А. И. Прикладная теория измерений // Прикладной многомерный статистический анализ. Ученые записки по статистике. 1978. Т. 33. С. 68–138.
7. Новиков Н. Ю. Теория шкал. Принципы построения эталонных процедур измерения, кодирования и управления. Москва: Физматлит, 2009. 474 с.
8. Дубина И. М. Математические основы эмпирических социально-экономических исследований. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2006. 263 с.
9. Гусев А. Н., Уточкин И. С. Психологические измерения: Теория. Методы: Общепсихологический практикум. Москва: Аспект Пресс, 2011. 317 с.
10. Ахременко А. С. Количественный анализ результатов выборов: современные методы и проблемы. Москва: Изд-во МГУ, 2008. 160 с.
11. Яремчук Н. А., Сікоза О. М. Побудова лінгвістичних шкал при експертному оцінюванні властивостей складних об'єктів // Системи обробки інформації. 2010. Вип. 5(86), С. 153–157.
12. Тоценко В. Г. Методи та системи підтримки прийняття рішень. Алгоритмічний аспект. Київ: Наук. думка, 2002. 381 с.
13. Домрачев В. Г., Полещук О. М., Комаров Е. Г., Артемьев И. И. Об определении рейтинговых оценок компетенции // Лесной вестник. 2008. № 4. С. 164–168.
14. Глотов В. А., Павельев В. В. Векторная стратификация. Москва: Наука, 1984. 95 с.
15. Государственная система обеспечения единства измерений. Применение «Шкалы измерений. Термины и определения»: РМГ 83-2007. Москва: Изд-во стандартов, 2007. 24 с.
16. Редьба О. Ю., Яремчук Н. А. Арифметизация ординальных шкал вимірювання якості програмних засобів // Інформаційні системи, механіка та керування: науково-технічний збірник. 2011. Вип. 7. С. 5–15.



17. Яремчук Н. А., Редьгоа О. Ю., Сікоза О. М. Особливості арифметизації дискретних вербальних шкал // *Механіка гіроскопічних систем*. 2012. № 25. С. 61–67.
18. Спесивцев А. В. Формализация и использование явных и неявных экспертных знаний для оценивания состояния сложных объектов: дисс. ... д-ра техн. наук., С.-Петербург, 2019. URL: <http://www.spiiras.nw.ru/dissovet/wpcontent/uploads/2019/04/dissertacija-spesivcevav-final.pdf>
19. Яремчук Н. А., Годя О. Ю. Оценивание неопределенности ординального измерения // *Системы обработки информации*. 2016. Вып. 6(143). С. 194–196.
20. Толстова Ю. Н. Измерение в социологии. Москва: КДУ, 2007. 288 с.
21. Harrington E. C. The Desirability Function // *Industrial Quality Control*. 1965. April. P. 494–498.
22. B. Govaerts, C. Le Bailly de Tillegem. Distribution of Desirability Index in Multicriteria Optimization Using Desirability Functions Based on the Cumulative Distribution Function of the Standard Norm. URL: <https://sites.uclouvain.be/IAP-Stat-Phase-V-VI/ISBApub/dp2005/dp0531.pdf>
23. Derringer G. C., Suich R. Simultaneous Optimization of Several Response Variables // *J. Qual. Tech.* 1980. 12(4). P. 214–219.
24. Kendall M. G., Smith B. The Problem of m Rankings // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1939. September, No 10(3). P. 275–287.
25. Ромашкина Г. Ф., Татарова Г. Г. Коэффициент конкордации в анализе социологических данных // *Социология*: 4М. 2005. № 20. С. 131–158.
26. Фишберн П. К. Измерение относительных ценностей / *Статистическое измерение качественных характеристик*. Пер. с англ. Под ред. Е. М. Четыркина. Москва: Статистика, 1972. С. 34–94.
27. Руа Б. Классификация и выбор при наличии нескольких критериев (метод ЭЛЕКТРА) / *Вопросы анализа и процедуры принятия решений*. Москва: Мир, 1976. С. 80–107.
28. Гудков П. А. Методы сравнительного анализа. Пенза: изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. 81 с.
29. Сомов В. Л., Толмачев М. П. Методы определения коэффициентов весомости динамических интегральных показателей // *Вопросы статистики*. 2017. № 6. С. 74–79.
30. Olenko A., Tsyganok V. Double Entropy Inter-Rater Agreement Indices // *Applied Psychological Measurement*. 2016. Vol. 40(1). P. 37–55.

### References

1. Litvak B. G. (1982). *Ekspertnaya informatsiya: Metody polucheniya i analiza* [Expert information: methods of obtaining and analysis]. Moscow: Radio i svyaz [in Russian].
2. Mueller D. (2007). *Obshchestvennyy vybor III* [Public Choice III]. Trans. from English. Moscow: National Research University Higher School of Economics, Institute “Economic School” [in Russian].
3. Litvak B. G. (1977). *O vybore deleniy shkaly* [Selection of the scale graduations]. *Statisticheskiye metody analiza ekspertnykh otsenok. Uchenyye zapiski po statistike – Statistical methods for analysis of expert opinions. Scholarly notes on statistics*, 29, 228–234 [in Russian].
4. Orlov A. I. (2010). *Organizatsionno-ekonomicheskoye modelirovaniye: teoriya prinyatiya resheniy* [Organizational and economic modelling: the theory of decision-making]. Moscow: KNORUS [in Russian].
5. Poleshchuk A. N. (2002). *Metody predstavleniya ekspertnoy informatsii v vide sovokupnosti term-mnozhestv polnykh ortogonal'nykh semanticheskikh prostranstv* [Methods for expert data presentation in form of term-sets of the full orthogonal semantic spaces]. *Lesnoy vestnik – Forestry bulletin*, 5, 198–216 [in Russian].
6. Orlov A. I. (1978). *Prikladnaya teoriya izmereniy* [The applied theory of measurements]. *Prikladnoy mnogomernyy statisticheskiy analiz. Uchenyye zapiski po statistike – Applied multidimensional statistical analysis. Scholarly notes on statistics*, 33, 68–138 [in Russian].
7. Novikov N.Yu. (2009). *Teoriya shkal. Printsipy postroyeniya etalonnykh protsedur izmereniya, kodirovaniya i upravleniya* [Theory of scales. Principles of constructing

- benchmark procedures for measurement, coding and control]. Moscow: Fizmatlit [in Russian].
8. Dubina I. M. (2006). *Matematicheskiye osnovy empirichnikh sotsialno-ekonomicheskikh issledovaniy* [Mathematical foundations of empirical socio-economic studies]. Barnaul: Altai University [in Russian].
  9. Gusev A. N., & Utochkin I. S. (2011). *Psikhologicheskiye izmereniya: Teoriya. Metody: obshchepsikhologicheskiy praktikum* [Psychological measurements: Theory. Methods: practical course on general psychology]. Moscow: Aspekt Press [in Russian].
  10. Akhremenko A. S. (2008). *Kolichestvennyy analiz rezultatov vyborov: sovremennyye metody i problemy* [Quantitative analysis of election results]. Moscow: Moscow State University [in Russian].
  11. Yaremchuk N. A., & Sikoz A. N. (2010). *Pobudova linhvistychnykh shkal pry ekspertnomu otsiniuvanni vlastyvostei skladnykh ob'ektiv* [Construction of linguistic scales at expert evaluations of complex objects properties]. *Systemy obrobky informatsii – Information Processing Systems*, 5(86), 153–157 [in Ukrainian].
  12. Totsenko V. G. (2002). *Metody ta systemy pidtrymky pryiniattia rishen. Alhorytmichnyi aspekt* [Methods and systems for decision-making]. Kyiv: Naukova dumka [in Ukrainian].
  13. Domrachev V. G., Poleshchuk A. N., Komarov Ye. G., & Artemiyev I. I. (2008). *Ob opredelenii reytingovykh otsenok kompetentsii* [Ranking the assessments of competence]. *Lesnoy vestnik – Forestry bulletin*, 4, 164–168 [in Russian].
  14. Glotov V. A., & Paveliyeva V. V. (1984). *Vektornaya stratifikatsiya* [Vector stratification]. Moscow: Nauka [in Russian].
  15. (2007). *Gosudarstvennaya sistema obespecheniya yedinstva izmereniy. Primeneniye “Shkaly izmereniy. Terminy i opredeleniya”*: RMG 83-2007 [The state system for standardization of measurements. Applications of “Measurement scale. Terms and definitions”]: RMG 83-2007]. Moscow: Publishing house of standards [in Russian].
  16. Redioha A. Yu., & Yaremchuk N. A. (2011). *Aryfmetyzatsiia ordinalnykh shkal vymiriuvannia yakosti prohramnykh zasobiv* [Arithmetizing the ordinary scales for quality measurements of software]. *Informatsiini systemy, mekhanika ta keruvannia: naukovo-tekhnichnyi zbirnyk – Information systems, mechanics and control*, 7, 5–15 [in Ukrainian].
  17. Yaremchuk N. A., Redioga A. Yu., & Sikoz A. N. (2012). *Osoblyvosti aryfmetyzatsii dyskretnykh verbalnykh shkal* [The characteristics of arithmetization of discrete verbal scales]. *Mekhanika hiroskopichnykh system – Mechanics of gyroscopic systems*, 25, 61–67 [in Ukrainian].
  18. Spesivtsev A. V. (2019). *Formalizatsiya i ispolzovaniye yavnykh i neyavnykh ekspertnykh znaniy dlya otsenivaniya sostoyaniya slozhnykh ob'ektiv*. Doctoral thesis [Formalization and applications of explicit and tacit expert knowledge in evaluating the state of complex objects]. Saint-Petersburg. Retrieved from <http://www.spiiras.nw.ru/dissovet/wpcontent/uploads/2019/04/dissertacija-spesivcevav-final.pdf> [in Russian].
  19. Yaremchuk N. A., & Goda A. Yu. (2016). *Otsenivaniye neopredelennosti ordinalnogo izmereniya* [Evaluation of ordinary measurement uncertainty]. *Systemy obrobky informatsii – Information Processing Systems*, 6(143), 194–196 [in Russian].
  20. Tolstova Yu. N. (2007). *Izmereniye v sotsiologii* [Measurement in sociology]. Moscow: KDU [in Russian].
  21. Harrington E. C. (1965). *The Desirability Function*. *Industrial Quality Control*, April, 494–498.
  22. B. Govaerts, C. Le Bailly de Tillegem. *Distribution of Desirability Index in Multicriteria Optimization Using Desirability Functions Based on the Cumulative Distribution Function of the Standard Norm*. Retrieved from <https://sites.uclouvain.be/IAP-Stat-Phase-V-VI/ISBApub/dp2005/dp0531.pdf>
  23. Derringer G. C., & Suich R. (1980) *Simultaneous Optimization of Several Response Variables*. *J. Qual. Tech.*, 12(4), 214–219. Retrieved from <https://doi.org/10.1080/00224065.1980.11980968>.
  24. Kendall M. G., & Smith B. (1939). *The Problem of m Rankings*. *The Annals of Mathematical Statistics*, September, 10(3), 275–287.
  25. Romashkina G. F., & Tatarova G. (2005). *Koeffitsiyent konkordatsii v analize*
-

- sotsiologicheskikh dannykh [The concordance factor in analyses of sociological data]. *Sotsiologiya: 4M – Sociology: 4M*, 20, 131–158 [in Russian].
26. Fishburn P. C. (1972). Izmereniye otnositelnykh tsennostey [Measurement of relative values]. In: *Statisticheskoye izmereniye kachestvennykh kharakteristik* [Statistical measurement of qualitative properties]. Trans. from English. Moscow: Statistika, pp. 34–94 [in Russian].
  27. Rua B. (1976). Klassifikatsiya i vybor pri nalichii neskol'kikh kriteriyev (metod ELEKTRA) [Classification and choice on availability of several criteria (method ELEKTRA)]. *Voprosy analiza i protsedury prinyatiya resheniy – Problems of analysis and procedure of decision-making*. Moscow: Mir, pp. 80–107 [in Russian].
  28. Gudkov P. A. (2008). *Metody sravnitel'nogo analiza* [Methods of comparative analysis]. Penza: Penza State University [in Russian].
  29. Somov V. L., & Tolmachev M. P. (2017). *Metody opredeleniya koeffitsiyentov vesomosti dinamicheskikh integralnykh pokazateley* [Methods of determining the weigh coefficients of the dynamic integrated indicators]. *Voprosy statistiki – Problems of statistics*, 6, 74–79 [in Russian].
  30. Olenko A., & Tsyganok V. (2016). Double Entropy Inter-Rater Agreement Indices. *Applied Psychological Measurement*, 40(1), 37–55.

**Посилання на статтю:**

Сіницький М. Є. Виборчі системи у цифрову епоху: базові проблеми та нові можливості. Частина II. Побудова шкал і підходи до визначення інтегрального рейтингу. *Науковий вісник Національної академії статистики, обліку та аудиту: зб. наук. пр.* 2021. №1-2. С. 75-85. doi: 10.31767/nasoa.1-2-2021.10.