В.Г. БАБЧУК,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Національна академія статистики, обліку та аудиту

Умови розкладання однорідної форми третього степеня від трьох змінних $V(x^3) = V(x_1, x_2, x_3)$ на лінійні множники

Розглянемо форму

$$V(x^3) = x_1^3 + k_1x_1^2x_2 + k_2x_1^2x_3 + k_3x_1x_2^2 + k_4x_1x_3^2 + k_5x_1x_2x_3 + k_6x_2^3 + k_7x_2^2x_3 +$$
$$+ k_8x_2x_3^2 + k_9x_3^3, \qquad k_j = const \quad \forall j = \overline{1,9} \tag{1}$$

Знайдемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \tag{2}$$

таку, щоб в силу системи (2) виконувалось рівняння

$$\dot{V}(x^3(t)) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)V(x^3(t)), \tag{3}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корені характеристичного рівняння

$$A - \lambda E| = -\lambda^3 + a_{33}\lambda^2 + a_{32}\lambda + a_{31} = 0\,, \tag{4}$$

системи (2) і

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{33}$$

Запишемо рівняння (3).

$$(3x_1^2 + 2k_1x_1x_2 + 2k_2x_1x_3 + k_3x_2^2 + k_4x_3^2 + k_5x_2x_3)x_2 +$$
$$+ (k_1x_1^2 + 2k_3x_1x_2 + k_5x_1x_3 + 3k_6x_2^2 + 2k_7x_2x_3 + k_8x_3^2)x_3 +$$
$$+ (k_2x_1^2 + 2k_4x_1x_3 + k_5x_1x_2 + k_7x_2^2 + 2k_8x_2x_3 + 3k_9x_3^2)\big(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\big) =$$
$$= a_{33}(x_1^3 + k_1x_1^2x_2 + k_2x_1^2x_3 + k_3x_1x_2^2 + k_4x_1x_3^2 + k_5x_1x_2x_3 + k_6x_2^3 +$$
$$+ k_7x_2^2x_3 + k_8x_2x_3^2 + k_9x_3^3).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових одночленах , отримаємо систему рівнянь відносно $a_{3j}(j = 1{,}3)$

$$\begin{cases} k_2a_{31} - a_{33} = 0 \\ k_5a_{31} + k_2a_{32} - k_1a_{33} = -3 \\ 2_4a_{31} = -k_1 \\ k_7a_{31} + k_5a_{32} - k_3a_{33} = -2k_1 \\ 3k_9a_{31} + k_4a_{33} = -k_5 \\ 2k_8a_{31} + 2k_4a_{32} = -2k_2 - 2k_3 \\ k_7a_{32} - k_6a_{33} = -k_3 \\ 2k_8a_{32} = -k_5 - 3k_6 \\ 3k_9a_{32} + k_8a_{33} = -k_4 - 2k_7 \\ 2k_9a_{33} = -k_8 \end{cases} \tag{5}$$

Якщо форма (1) розкладається на множники, то із теореми 3 роботи [1] слідує, що система (5) сумісна. Знайшовши a_{3j} із (5), отримаємо систему (2) і рівняння (4). Нехай розв'язками рівняння (4) будуть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. За теоремою 1 із [1] існують лінійні форми

$$V_i(x)\sum_{j=1}^{3} k_{ij}x_j, \quad i=\overline{1,3}, \quad k_{i1}=1$$

такі, що в силу системи (2) виконуються рівності

$$\dot{V}_i(x(t)) = \lambda_i v_i(x(t)), \quad i=\overline{1,3}$$

і тоді форма (1) розкладається на множники

$$V(x^3) = V_1(x)\cdot V_2(x)\cdot V_3(x).$$

Таким чином, доведена

Теорема 1. Якщо форма (1) така, що система (5) відносно $a_{3j}\ (j=\overline{1,3})$ із (2) сумісна, то форма (1) розкладається на лінійні множники

$$V(x^3) = V_1(x)\cdot V_2(x)\cdot V_3(x),$$

які в силу системи (2) задовольняють диференціальним рівнянням

$$\dot{V}_i(x(t)) = \lambda_i V_i(x(t)) \quad (i=\overline{1,3}),$$

де λ_i – корені характеристичного рівняння (4)

$$\lambda^3 - a_{33}\lambda^2 - a_{32}\lambda - a_{31} = 0\ .$$

Приклад.

Дослідити на розкладання форму

$$V(x^3) = x_1^3 + x_1^2x_2 + \frac{1}{2}x_1^2x_3 + \frac{3}{4}x_1x_2^2 - \frac{5}{4}x_1x_2x_3 - \\ -\frac{1}{4}x_1x_3^2 + \frac{3}{4}x_2^3 - \frac{1}{2}x_2x_3^2 + \frac{1}{4}x_3^3 \qquad (1')$$

на лінійні множники і знайти їх.

Знайдемо систему диференційних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \qquad (2')$$

в силу якої виконується рівняння

$$\dot{V}(x^3(t)) = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)V(x^3(t)) = a_{33}V(x^3(t)) \qquad (3')$$

Із умови (3')

$$(3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{5}{4}x_2x_3 - \frac{1}{4}x_3^2)x_2 +$$

$$+(x_1^2 + \frac{3}{2}x_1x_2 - \frac{5}{4}x_1x_3 + \frac{9}{4}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2)x_3 +$$

$$+(\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{5}{4}x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1x_3 - x_2x_3 + \frac{3}{4}x_3^2)(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = a_{33}V(x^3),$$

прирівнюючи коефіцієнти при однакових одночленах, отримаємо систему рівнянь відносно a_{3j} $\quad (j=\overline{1,3})$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a_{31}-a_{33}=0 \\ -\frac{5}{4}a_{31}+\frac{1}{2}a_{32}-a_{33}=-3 \\ a_{31}=2 \\ 5a_{32}+3a_{33}=8 \\ 3a_{31}-a_{33}=5 \\ a_{31}+\frac{1}{2}a_{32}=\frac{5}{2} \\ a_{33}=1 \\ a_{32}=1 \\ 3a_{32}-2a_{33}=1 \\ a_{33}=1 \end{cases} \tag{5'}$$

Система (5') сумісна, значить форма (1') розкладається на множники:

$$V(x^3)=V_1(x)\cdot V_2(x)\cdot V_3(x).$$

Знайдемо $V_i(x) \quad (i=\overline{1,3})$

Система (2') при $a_{31}=2$, $a_{32}=a_{33}=1$ має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=x_3 \\ \dot{x}_3=2x_1+x_2+x_3. \end{cases}$$

Характеристичним рівнянням цієї системи буде $\lambda^3-\lambda^2-\lambda-2=0$,

звідки: $$\lambda_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2};\ \lambda_2=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2};\ \lambda_3=2.$$

Із рівнянь

$$\dot{V}_i(x)=\lambda_i V_i(x),$$

де

$$V_i(x)=x_1+k_{i1}x_2+k_{i2}x_3,$$

знайдемо $V_i(x)$:

$$V_1(x)=x_1+\frac{\sqrt{3}i}{2}x_2-\frac{1+\sqrt{3}i}{4}x_3;$$

$$V_2(x)=x_1-\frac{\sqrt{3}i}{2}x_2+\frac{-1+\sqrt{3}i}{4}x_3;$$

$$V_3(x)=x_1+x_2+x_3.$$

Умови розкладання однорідної форми четвертого степеня

$$V(x^4)=V(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

від чотирьох змінних на лінійні множники

$$\begin{aligned}V(x^4)&=x_1^4+k_1x_1^3x_2+k_2x_1^3x_3+k_3x_1^3x_4+k_4x_1^2x_2^2+k_5x_1^2x_3^2+k_6x_1^2x_4^2+\\&+k_7x_1^2x_2x_3+k_8x_1^2x_2x_4+k_9x_1^2x_3x_4+k_{10}x_1x_2^3+k_{11}x_1x_3^3+k_{12}x_1x_4^3+\\&+k_{13}x_1x_2^2x_3+k_{14}x_1x_2^2x_4+k_{15}x_1x_2x_3^2+k_{16}x_1x_2x_4^2+k_{17}x_1x_2x_3x_4+k_{18}x_1x_3^2x_4+\\&+k_{19}x_1x_3x_4^2+k_{20}x_2^4+k_{21}x_2^3x_3+k_{22}x_2^3x_4+k_{23}x_2^2x_3^2+k_{24}x_2^2x_4^2+k_{25}x_2^2x_3x_4+\\&+k_{26}x_2x_3^3+k_{27}x_2x_4^3+k_{28}x_2x_3^2x_4+k_{29}x_2x_3x_4^2+k_{30}x_3^4+k_{31}x_3^3x_4+k_{32}x_3^2x_4^2+\\&+k_{33}x_3x_4^3+k_{34}x_4^3\end{aligned}\qquad(6)$$

і систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=x_3\\ \dot{x}_3=x_4\\ \dot{x}_4=a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4\end{cases}\qquad(7)$$

яка має характеристичне рівняння

$$\lambda^4-a_{44}\lambda^3-a_{43}\lambda^2-a_{42}\lambda-a_{41}=0\qquad(8)$$

з коренями $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\quad(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=a_{44})$.

Систему (7) знайдемо із умови, щоб форма (1) задовольняла рівняння

$$\dot{V}(x(t))=a_{44}V(x^4(t))\qquad(9)$$

Прирівнюючи коефіцієнти в (9) при однакових одночленах, отримаємо систему 35-х рівнянь відносно $a_{4j}\,(j=\overline{1,4})$. Позначимо цю систему через (K_4). Тоді очевидно, буде вірне твердження, аналогічне теоремі 1.

Теорема 2. Якщо форма (6) така, що система (K_4) відносно $a_{4j}\,(j=\overline{1,4})$ із (7) сумісна, то форма (6) розкладається на лінійні множники

$$V(x^4)=V_1(x)\cdot V_2(x)\cdot V_3(x)\cdot V_4(x)$$

які в силу системи (7) задовольняють диференціальним рівнянням

$$\dot{V}_i(x(t))=\lambda_iV_i(x\ \ (t))\ \ (i=\overline{1,4}),$$

де λ_i – корені характеристичного рівняння (8) системи (7).

Список використаних джерел

1. Бабчук В. Г. Метод знаходження коренів алгебраїчного рівняння n-го порядку// Науковий вісник Державної академії статистики, обліку та аудиту. – 2010. – №1 (26)
2. Ф. Р. Гантмихер. Теория матриц.: Наука. М.1967 – 575 с.