

**Новий вид інтегрального статистичного індексу і методи його обчислення**

Запропоновано новий статистичний показник – інтегральний індекс. Інтегральний індекс є комбінацією трьох або більше сукупностей елементів. Запропоновано методику його обчислення.

**Ключові слова:** статистичний індекс, нескінченний добуток, розрахунок.

Основні завдання соціально-економічної статистики включають розроблення системи показників і методів їх розрахунку. До основних показників належать і статистичні індекси. Згідно з [1] статистичним індексом називають узагальнюючий відносний показник порівняння двох сукупностей, що складаються з елементів, які безпосередньо не піддаються підсумовуванню. Такими елементами є соціально-економічні фактори, причому відповідно до наших уявлень про економічну або соціальну природу процесів істотно значення має не кожен з цих окремих соціально-економічних факторів, а їх цілком певна комбінація – статистичний індекс.

Основною особливістю статистичних індексів як математичного елемента є те, що їх не можна підсумовувати (віднімати), але індекс завжди можна представити як деяку математичну функцію. Будь-яку математичну функцію задають у певному математичному просторі. Оскільки індекси не можна підсумовувати (віднімати), звідси слідує, що індекси як математична функція задаються в афінному математичному просторі. Згідно з [2, с. 238] особливістю афінного простору є те, що координатні осі такого простору мають різні розмірності, і для афінного простору не можна ввести математичні поняття відстані між точками і кута між відрізками (векторами). Такі математичні обмеження призводять до великих математичних ускладнень при створенні і розрахунку узагальнюючих статистичних індексів.

Відповідно до уявлень про економічну природу ринкової економіки істотно значення має не кожен з економічних факторів, що діють на ринку, а цілком певна їх комбінація. Цю комбінацію називають рейтингом банку (вузу, країни), або конкурентоспроможністю товару (фірми, країни), або індексом економічного ризику, індексом фінансової стабільності та іншими узагальнюючими комбінаціями. Різними авторами цих узагальнюючих індексів розроблено конкретні методики їх обчислення. Їх основним недоліком дуже часто є ігнорування вимог математики афінного математичного простору, аксіом теорії розмірностей, зокрема Пі–теореми Бекінгема [3, с. 314].

Поява в економічній науці робіт з узагальнюючих комбінацій свідчить про наявність нового класу економіко-математичних задач. Тому виникає нова проблема – розробити універсальні способи і методики розрахунку таких узагальнюючих індексів на чіткій математичній і методичній базі, так само як це зроблено в математичному програмуванні і в економетрії.

Розв'язання цієї нової проблеми дозволяє статистиці вибрати потрібні для економіки статистичні інтегральні індекси, ввести нові статистичні інтегральні індекси і таким чином розширити область застосування статистики.

Отже, хоча з розвитком економіки і суспільства на практиці виникає необхідність введення нових узагальнюючих статистичних індексів, але теоретична наука не забезпечує загальну математичну та методичну базу для створення узагальнюючих інтегральних статистичних індексів. Метою цієї статті і є створення нового виду статистичних індексів і методів їх розрахунку на чіткій математичній та методичній базі.

*Математичні поняття та апарат*

Інтегральним статистичним індексом  $I$  назвемо спільну дію комбінації певних факторів (величин), що мають різну розмірність. Розмірністю величини назвемо коротку або повну назву фактора-величини. З точки зору розмірності всі величини можна поділити на відкриті та латентні величини. Відкритою є така величина, яка має офіційну одиницю вимірювання, наприклад кг. Латентною назвемо таку величину, яка не має офіційної одиниці вимірювання, наприклад конкурентоспроможність (виробу, країни, регіону).

З математичного боку інтегральний статистичний індекс  $I$  є математичною функцією факторів-величин, що мають різну розмірність, яку позначимо так:  $I = f(A, B, C)$ , де  $A, B, C$  – фактори-величини, що мають різну розмірність (взято лише три фактори, аби не захащувати виклад великими формулами).

З точки зору системного аналізу [4] функція  $f(A, B, C)$  є функцією згортки трьох факторів-величин. Тому в [4] першочерговою математичною задачею є знаходження явного вигляду функції згортки  $f(A, B, C)$ . Серед методів знаходження

функції згортки в [4] з точки зору статистики [1] привабливим є метод контрольних показників, коли функція подається у такому вигляді:

$$F_0(A, B, C) = f(A, B, C) / f_0(A_0, B_0, C_0) \quad (1)$$

де:  $f_0(A_0, B_0, C_0)$  – контрольний показник-еталон, а  $A_0, B_0, C_0$  – еталонні показники факторів.

Як зазначено в [1], вираз (1) є узагальнюючим відносним показником, але вираженням не у вигляді двох сукупностей, а у вигляді трьох і більше сукупностей. У [5] як функцію згортки невідомої функції  $f(A, B, C)$  запропоновано використовувати її розкладання в скінченний або нескінченний добуток, тобто подати в такому явному вигляді:

$$f(A, B, C) = (ABC)^1 (ABC)^2 (ABC)^3 \dots = \prod_{n=1}^{\infty} (ABC)^n \quad (2)$$

Згідно з [6] таке розкладання сходиться до шуканої функції, являє собою відповідний степеневий ряд і має вигляд  $(ABC)^1 < 1$ . Остання умова є умовою збіжності нескінченного добутку (2) при  $n \rightarrow \infty$ .

З теорії розмірності [3, с. 314] слідує, що значення показника розмірності факторів-величин  $A, B, C$  не може дорівнювати нескінченності, оскільки основне рівняння теорії розмірності має такий вигляд:

$$(\dim I) = (\dim A)^{n_1} (\dim B)^{n_2} (\dim C)^{n_3} \quad (3)$$

де:  $(\dim I), (\dim A), (\dim B), (\dim C)$  розмірності величин  $I, A, B, C$ , а  $n_1, n_2, n_3$  показники розмірностей, обмежені раціональними числами.

Таким чином, з теорії розмірностей і виразу (3) слідує, що розкладання функції згортки в (2) має скінченний добуток і в загальному випадку запишеться так [6]:

$$f(A, B, C) = A^{n_1} B^{n_2} C^{n_3} \quad (4)$$

або так:

$$F_0(A, B, C) = (A/A_0)^{n_1} (B/B_0)^{n_2} (C/C_0)^{n_3} \quad (4a)$$

Відносна форма функції згортки у формі (4a) є більш загальною і дозволяє врахувати “вагу  $g_i$ ”, де “вага  $g_i$ ” – ступінь впливу фактора  $A, B$  або  $C$  в загальній комбінації факторів. Тоді з урахуванням введення ваг  $g_A, g_B, g_C$  формули (4) і (4a) можуть бути записані так:

$$f(A, B, C) = (g_A A)^{n_1} (g_B B)^{n_2} (g_C C)^{n_3} \quad (5)$$

або:

$$F_0(A, B, C) = (g_A A / g_A A_0)^{n_1} \times (g_B B / g_B B_0)^{n_2} (g_C C / g_C C_0)^{n_3} \quad (5a)$$

якщо вважати, що вага фактора не змінюється для еталона, що зазвичай має місце.

Врахуємо, що серед факторів  $A, B, C$  можуть бути якісь фактори, що негативно впливають на комбінацію факторів, тобто при збільшенні, наприклад, фактора  $B$  комбінація факторів зменшується. Щоб врахувати негативний вплив фактора  $B$ , вважатимемо фактор  $B$  від’ємною величиною з  $n_2 < 0$ .

Тоді відповідно до теорії розмірностей [3] вираз (5) або (5a) можна переписати в такій формі:

$$f(A, B, C) = \frac{(g_A A)^{n_1} (g_C C)^{n_3}}{(g_B B)^{n_2}} \quad (6)$$

або:

$$F_0(A, B, C) = \frac{(A/A_0)^{n_1} (C/C_0)^{n_3}}{(B/B_0)^{n_2}} \quad (6a)$$

Для урахування того, що серед функцій  $F_0(A, B, C)$  можуть бути як відкриті, так і латентні величини, розглянемо методи розрахунку для еталонних величин різними шляхами.

*Модифікація методу найменших квадратів для відкритих величин*

Оскільки для відкритих величин  $f(A, B, C)$  завжди, згідно з їх визначенням, є значенням функції, то для визначення невідомих показників ступенів  $n_1, n_2, n_3$  можна застосувати метод найменших квадратів (МНК).

Нехай є експериментальна вибірка з  $m$  значень функції  $f(A, B, C)$ , для якої можна скласти систему з розмірних величин по (6) або по (6a).

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= (g_1 A^1)^{n_1} (g_2 B^1)^{n_2} (g_3 C^1)^{n_3} \\ b_2 &= (g_1 A^2)^{n_1} (g_2 B^2)^{n_2} (g_3 C^2)^{n_3} \\ &\dots \\ b_m &= (g_1 A^m)^{n_1} (g_2 B^m)^{n_2} (g_3 C^m)^{n_3} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

або:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{(g_1 A^1)^{n_1} (g_3 C^1)^{n_3}}{(g_2 B^1)^{n_2}} \\ &\dots \\ b_m &= \frac{(g_1 A^m)^{n_1} (g_3 C^m)^{n_3}}{(g_2 B^m)^{n_2}} \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

Згідно з [3] з аксіоматики теорії розмірностей слідує, що є тільки одна єдина безрозмірна величина  $n = 4$  і  $k = 3$ , тобто  $n - k = 4 - 3 = 1$ , де  $n$  – кількість розмірних величин,  $k$  – кількість основних розмірних величин  $A, B, C$ . Тому для перетворення розмірних величин у (7) або в (7a) на безрозмірні розділимо  $b_1, b_2, \dots, b_m$  на якесь окреме відоме значення  $b_k$  (еталон) і в підсумку отримаємо систему безрозмірних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{b_1}{b_k} &= \left( \frac{A^1}{A^k} \right)^{n_1} \left( \frac{B^1}{B^k} \right)^{n_2} \left( \frac{C^1}{C^k} \right)^{n_3} \\ \dots & \\ \frac{b_m}{b_k} &= \left( \frac{A^m}{A^k} \right)^{n_1} \left( \frac{B^m}{B^k} \right)^{n_2} \left( \frac{C^m}{C^k} \right)^{n_3} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

або:

$$\left. \begin{aligned} \frac{b_1}{b_k} &= \left( \frac{A^1}{A^k} \right)^{n_1} \left( \frac{B^k}{B^1} \right)^{n_2} \left( \frac{C^1}{C^k} \right)^{n_3} \\ \dots & \\ \frac{b_m}{b_k} &= \left( \frac{A^m}{A^k} \right)^{n_1} \left( \frac{B^k}{B^m} \right)^{n_2} \left( \frac{C^m}{C^k} \right)^{n_3} \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

де  $n_2 < 0$ .

Відносна форма представлення результатів вибірки дозволяє, по-перше, вилучити визначення "ваг  $g_1$ ", по-друге, привести систему МНК до звичного безрозмірного вигляду, по-третє, провести логарифмування. Тоді після логарифмування можна отримати перевизначену систему рівнянь для визначення невідомих ступенів  $n_1, n_2, n_3$ :

$$\left. \begin{aligned} \ln \left( \frac{b_1}{b_k} \right) &= n_1 \ln \left( \frac{A_1^1}{A_1^k} \right) \pm n_2 \ln \left( \frac{A_2^k}{A_2^1} \right) \pm n_3 \ln \left( \frac{A_3^1}{A_3^k} \right) \\ \ln \left( \frac{b_2}{b_k} \right) &= n_1 \ln \left( \frac{A_1^2}{A_1^k} \right) \pm n_2 \ln \left( \frac{A_2^k}{A_2^2} \right) \pm n_3 \ln \left( \frac{A_3^2}{A_3^k} \right) \\ \dots & \\ \ln \left( \frac{b_m}{b_k} \right) &= n_1 \ln \left( \frac{A_1^m}{A_1^k} \right) \pm n_2 \ln \left( \frac{A_2^k}{A_2^m} \right) \pm n_3 \ln \left( \frac{A_3^m}{A_3^k} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Згорнувши систему (9) методом найменших квадратів, отримаємо систему нормальних рівнянь МНК.

Далі розв'язуємо систему нормальних рівнянь МНК щодо невідомих ступенів  $n_1, n_2, n_3$ , які в цьому випадку будуть значеннями ваг  $g_1, g_2, g_3$ .

*Методика розрахунку латентних індексів*

З визначення латентних інтегральних індексів слідує, що їх не можна кількісно визначити через відсутність відповідної одиниці вимірювання. Таким чином, значення величин  $b_i$  невідомі, і застосовувати метод МНК неможливо. Але для латентних інтегральних індексів можна використовувати непрямий шлях впорядкування за їхньою абсолютною величиною, яку обчислюємо за формулою (5а) або (6а):

$$F_0(A, B, C) = (A/A_0)^1 (B/B_0)^1 (C/C_0)^1 \quad (10)$$

або:

$$F_0(A, B, C) = \left( \frac{A}{A_0} \right)^1 \left( \frac{B_0}{A} \right)^1 \left( \frac{C}{\tilde{N}_0} \right)^1 \quad (10a)$$

Вибір показника ступеня  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$  може бути обґрунтований у такий спосіб.

Нехай – вектори  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ , побудовані на координатних осях декартової системи координат в афінному математичному просторі. Розглянемо змішаний добуток цих векторів  $(\bar{A} \times \bar{B}) * \bar{C}$ , де  $\bar{A} \times \bar{B}$  – векторний добуток векторів  $\bar{A}$  і  $\bar{B}$ , а  $(\bar{A} \times \bar{B}) * \bar{C}$  – скалярний добуток векторів  $(\bar{A} \times \bar{B})$  та  $\bar{C}$ . Згідно з [7] змішаним добутком векторів є об'єм призми, побудованої на цих векторах (V):

$$V = F(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}) = (\bar{A} \times \bar{B}) * \bar{C} = ABC \quad (11)$$

або для еталона:

$$V_0 = F(\bar{A}_0, \bar{B}_0, \bar{C}_0) = (\bar{A}_0 \times \bar{B}_0) * \bar{C}_0 = A_0 B_0 C_0 \quad (11a)$$

Отже, використання показника інтегрального індексу дає можливість визначити сукупну дію комбінації факторів  $A, B, C$  як об'єм у тривимірному афінному просторі. У разі використання багатовимірного простору  $n$  – факторів (величин) також можна визначити  $n$ -мірний об'єм як змішаний добуток відповідних векторів за такою, наприклад, для чотиривимірного простору векторів  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D} - ((\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C}) * \bar{D}$ .

Наступною важливою перевагою вибору показника ступеня  $n = 1$  є те, що цей показник інваріантний щодо ступеня  $n$ . Дійсно, нехай за формулами (10) або (10a) розраховано латентні інтегральні індекси  $F_0(A, B, C)$  для  $m$  значень цих індексів. Побудуємо впорядковану за абсолютною величиною вибірку  $F_{01} > F_{02} > F_{03} > \dots > F_{0m}$ . Згідно з визначенням інтегрального статистичного індексу всі його значення  $F_{01}, F_{02}, F_{03}, \dots, F_{0m}$  завжди є додатними числами. Тоді будь-який ступінь показника  $n \neq 1$  дорівнюватиме  $(F_{01})^n, (F_{02})^n, (F_{03})^n, \dots, (F_{0m})^n$ .

Згідно з елементарною властивістю додатної нерівності вона не міняє свого виду при її зведенні в будь-який ступінь, тобто  $(F_{01})^n > (F_{02})^n > (F_{03})^n > \dots > (F_{0m})^n$ . Отже, місце інтегрального статистичного індексу у впорядкованій вибірці індексів не змінюється від зміни величини показника ступеня  $n$ . Саме властивість інваріантності дозволяє інтегральному статистичному індексу бути однозначною функцією факторів-величин.

Розглянемо тепер ті специфічні особливості розрахунку латентних інтегральних індексів, які виникають при експериментальному їх визначенні.

Технічні характеристики і параметри холодильників

№ з/п	Характеристики, параметри	Марка холодильника						
		Сиріус	Пурга	Фріз	Фенікс	Снайге	Мінськ 15м	Люксус
1	Відпускна ціна, ум. од.	1400	1700	1600	1450	1600	1700	1700
2	Сумарні експлуатаційні витрати за весь термін служби	6000	4500	6200	6700	7000	6000	5000
3	Ресурс (тис. год.)	100	130	120	130	110	120	130
4	Споживання електроенергії за добу, кВт/ч	1,65	1,10	1,25	1,30	1,75	1,65	0,90
5	Температура низькотемпературного відділення (НТВ), 0С	-12	-15	-12	-18	-10	-12	-12
6	Обсяг НТВ, дм3	40	50	50	60	40	50	60
7	Дизайн (бали)	4	6	3	5	3	4	5
8	Термін зберігання продуктів після відключення електроенергії, год.	5	11	10	10	5	5	10
9	Матеріаломісткість, кг	48	60	55	55	70	65	55
10	Об'єм, л	250	280	260	265	240	280	240

*Результати*

Для повного розуміння і більшої наочності пропонуваного методу розрахунку інтегрального індексу розглянемо такий експериментальний приклад.

Для ілюстрації наведемо розрахунок конкурентоспроможності виробів (на прикладі холодильників) з використанням даних типової задачі з [8]. У табл. 1 наведено технічні характеристики і параметри холодильників.

Переведемо дані табл. 1 у відносну форму. Для кожного фактора, що має позитивний вплив, розділимо його кількісний показник на його максимальне значення, а для кожного фактора, що має негативний вплив, розділимо його кількісний показник на його мінімальне значення, щоб задовольнити збіжність розкладання в нескінченний добуток. Факторами, що мають негативний вплив, вважатимемо “ціну виробу”, “витрати на експлуатацію” і “споживання електроенергії”. Результати отриманих розрахунків у відносних величинах наведено в табл. 2.

За формулою (8) проведемо розрахунок конкурентоспроможності виробу (табл. 3), звідки слідує, що максимальну конкурентоспроможність має холодильник марки “Пурга”.

Порівняно з аналогічними методами [8; 9] запропонований метод відрізняється простотою побудови економіко-математичної моделі та широким спектром застосування до різних економічних категорій. Порівняно з цими методами він дозволяє з чотирьох етапів побудови економіко-математичної моделі прибрати з розгляду два найслабші етапи з погляду на обґрунтування та виконання, а саме: 1) вибір шкал і оцінювання значень первинних показників; 2) побудова узагальнених групових та інтегральних показників економічних факторів.

Запропонований інтегральний індекс відрізняється від використовуваних у статистичній практиці аналогів тим, що його обчислення здійснюється на єдиній математичній і методичній базі, що дозволяє за допомогою одного алгоритму розрахунку оцінити кількісні параметри дуже

Таблиця 2

Фактори конкурентоспроможності холодильників у відносних значеннях

№ з/п	Фактори	Марка холодильника						
		Сиріус	Пурга	Фріз	Фенікс	Снайге	Мінськ 15 м	Люксус
1	Перший	1,000	1,214	1,143	1,036	1,143	1,214	1,242
2	Другий	1,467	1,000	1,378	1,489	1,556	1,333	1,111
3	Третій	0,769	1,000	0,923	1,000	0,846	0,923	1,000
4	Четвертий	1,833	1,222	1,389	1,444	1,944	1,833	1,000
5	П'ятий	0,667	0,833	0,667	1,000	0,555	0,667	0,667
6	Шостий	0,667	0,833	0,833	1,000	0,667	0,833	1,000
7	Сьомий	0,667	1,000	0,500	0,833	0,500	0,667	0,833
8	Восьмий	0,455	1,000	0,909	0,909	0,455	0,455	0,909
9	Дев'ятий	1,000	1,250	1,146	1,146	1,458	1,354	1,146
10	Десятий	0,893	1,000	0,929	0,946	0,857	1,000	0,857

Конкурентоспроможність різних марок холодильників

Марка	Сіріус	Пурга	Фріз	Фенікс	Снайге	Мінськ 15м	Люксем
Конкурентоспроможність	0,0345	0,3742	0,0864	0,2806	0,0121	0,0388	0,2737

різнорідних з економічної та соціальної точки зору критеріїв соціально-економічних систем.

Він має універсальний характер і дозволяє кількісно оцінити всі аспекти розвитку соціально-економічних систем. Алгоритм його розрахунку є вельми простим і не вимагає наявності комп'ютера, що дозволяє оперативного його обчислювати в будь-який час і унеможлиблює елемент суб'єктивності при його обчисленні, притаманний методикам обчислення багатьох його аналогів.

Безперечні переваги запропонованого інтегрального індексу дозволяють з його допомогою створити систему нових статистичних показників, які адекватно відображають досі не описані характеристики соціально-економічних систем.

Завданням статистиків і дослідників конкретних галузей знання є вибір нових інтегральних індексів, їх обґрунтування і запровадження в статистичну практику.

Список використаних джерел

1. Гинзбург А. И. Статистика : [моногр. ] / Гинзбург А. И. – Санкт-Петербург : Питер. – 2003. – 128 с.
2. Анго А. Л. Математика для электро- и радиоинженеров : [моногр. ] / Анго А. Л. – М. : Наука. – 1967. – 770 с.
3. Яворский Б. М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов / Яворский Б. М. , Детлаф А. А. – М. : Наука. – 1965. – 848 с.
4. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа : [моногр. ] / Моисеев Н. Н. – М. : Наука. – 1981. – 487 с.
5. Белов В. Т. Универсальный метод экономико-математического моделирования / В. Т. Белов, А. И. Гапонов // Экономика Крыма. – 2011. – № 3. – с. 78–82.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : Т. 2. / Фихтенгольц Г. М. – М. : Физматгиз. – 1960. – 817 с.
7. Баврин И. И. Курс высшей математики : [моногр. ] / Баврин И. И. – М. : Просвещение, 1992. – 400 с.
8. Павленко А. Ф. Маркетинг / Павленко А. Ф. , Войгак А. В. – К. : КНЭУ. – 2001. – 106 с.
9. The Global Competitiveness Report 2009–2010 / World Economic Forum / Geneva – Switzerland, 2009, – 479 p.

УДК 311:339.372

**В. С. Михайлов,**  
доктор економічних наук, професор,  
директор Науково-дослідного інституту статистики;  
**Ю. І. Прилипко,**  
кандидат економічних наук,  
старший науковий співробітник,  
НТК статистичних досліджень

**Методичні проблеми вибіркового спостереження підприємств роздрібної торгівлі**

Розглянуто основні проблеми вдосконалення чинної системи статистичного спостереження у сфері роздрібної торгівлі. Розроблено інструментарій вибіркового обстеження підприємств (юридичних осіб) роздрібної торгівлі з урахуванням нових вимог і структурних змін у галузі. Представлено алгоритм оптимального розподілу генеральної сукупності на дві групи підприємств, у яких, відповідно, проводиться вибіркоче і суцільне спостереження. Алгоритм передбачає ітерацію процедур групування до досягнення заданої точності результатів спостереження.

**Ключові слова:** роздрібна торгівля, вибіркоче спостереження, метод Неймана – Чупрова, метод Горвіца – Томпсона, класифікація видів економічної діяльності.

Загальновідомо, що торгівлю вважають “двигуном”, рушійною силою прогресу економіки. Важливою частиною торгівлі є роздрібна торгівля, яка безпосередньо сприяє задоволенню потреб

споживачів. Це актуалізує питання адекватного статистичного оцінювання цієї сфери. Виходячи з цього статистичний відділ Департаменту з економічних і соціальних питань Організації Об'єднаних Націй у 2008 році після декількох років кропіткої роботи розробив “Міжнародні рекомендації щодо

© В. С. Михайлов, Ю. І. Прилипко